

नवी भूमिति.

भाग १ दो.

ગૂજરાત વિદ્યાપીઠ ગ્રંથાલય

[ગુજરાતી કૅપીરાઈટ વિભાગ]

અનુક્રમાંક ૬૭૭૮ વાર્ષિક

પુસ્તકનું નામ નવ્યા ભૂમિતિ-૧

વિષય મેર: ૮૪૬:૩૬

Department of Public Instruction, Bombay.

NEW GEOMETRY

PART I.

BY

Balkrishna Shridhar Kolatkar, L. Ag.,

First Asst. D. E. Inspector, Nasik,

AND

Ramchandra Janardan Gokhale, B.A.,

Teacher, Training College for Men, Poona.

Translated into Gujarati

BY

Ganesh Bachaji Sapre, B. A., S.T.C.,

AND

Manmohandas Dalpatram Dalal, B.A., S.T.C.,

Teachers, P. R. Training College, Ahmedabad.

1ST EDITION.

5000 COPIES.

PUBLISHED BY

Chimanlal Chunilal & Co.,

Proprietors,

Chimanlal Maneklal

AND

Chunilal Khushaldas,

AHMEDABAD.

All rights reserved.

1916.

PRICE $8\frac{1}{4}$ ANNAS.

Printed at
THE DIAMOND JUBILEE PRINTING PRESS,
Salapose Road, AHMEDABAD,
by Devidas Chhaganlal Parikh.

મુંબઈ ઇલાકાનું સરકારી કેળવણીખાતું.

નવી ભૂમિતિ.

ભાગ ૧લો.

મૂળ લેખક,

બાળકૃષ્ણ શ્રીધર કોલટકર, એલ્. એચ.

ફર્સ્ટ ગ્રા. ડે. એ. ઇન્સ્પેક્ટર, નાસિક,

અને

રામચંદ્ર જનાર્દન ગોખલે, બી. એ.,

શિક્ષક, ટ્રેનિંગ કોલેજ ફોર મેન, પુના.

અનુવાદક,

ગણેશ બચાજ સપ્તે, બી. એ., એસ. ટી. સી.,

અને

મનમોહનદાસ દલપતરામ દલાલ, બી. એ.,

એસ. ટી. સી.,

શિક્ષક, પ્રેમચંદ્ર રાયચંદ્ર ટ્રેનિંગ કોલેજ, અમદાવાદ.

આવૃત્તિ ૧લી.

પ્રત-૫૦૦૦.

સને ૧૯૧૬.

છપાવી પ્રસિદ્ધ કરનાર,

ચીમનલાલ, ચુનીલાલની કંપની.

માલીક-ચીમનલાલ માણેકલાલ

અને

ચુનીલાલ ખુશાલદાસ

આસ્તોડીઆ રોડ-અમદાવાદ.

સરકારે સર્વ હક સ્વાધીન રાખ્યા છે.

કિં. ૮૧ આના.

ગુજરાત વિદ્યાપીઠ ગ્રંથાલય
અમદાવાદ
ગુજરાતી કૌપીરાઈટ-સંગ્રહ
૬૨ / —

અમદાવાદ—સલાપોસ રોડ,
ધિ “ડાયમંડ જ્યુબિલિ” પ્રિન્ટિંગ પ્રેસમાં
પરીખ દેવીદાસ હગનલાલે છાપ્યું.

પ્રસ્તાવના.



ટ્રેનિંગ કોલેજના નવા કોડ પ્રમાણે ટ્રેનિંગ કોલેજમાં ‘નવી ભૂમિતિ’* શીખવવી જરૂરની છે; તેથી આ વિષય શીખવામાં વિદ્યાર્થીઓને મદદ મળે એ હેતુથી અમે આ પુસ્તક લખ્યું છે.

આ પુસ્તક કોઈ પણ અંગ્રેજી ગ્રંથનું ભાષાંતર નથી, પણ તે અંગ્રેજીમાંના કેટલાક ગ્રંથોને આધારે લખેલું છે. નવી ભૂમિતિમાં પ્રાયોગિક ભાગ વિશેષ મહત્ત્વનો છે, અને તેનો યોગ્ય ઉપયોગ કરવાથી વિદ્યાર્થીઓને આ વિષય સુલભ થવાનો સંભવ છે; તેથી તેનો વિશેષ વિસ્તાર કર્યો છે.

આ પુસ્તક તૈયાર કરવાના કામમાં મેસર્સ ગોડફ્રે અને સિડ્નસ, બર્નાર્ડ અને આઈડિસ, પિયરપોઈટ, એગર વગેરે ગ્રંથકારોના અંગ્રેજી ગ્રંથો તેમજ દેવકુળેકૃત મરાઠી ભૂમિતિ ધણી ઉપયોગી થઈ પડી છે. એ માટે આ સર્વે ગ્રંથકારોના પ્રસ્તુત ગ્રંથકાર ધણા આભારી છે.

ગ્રંથકર્તા.

* નવી ભૂમિતિ—નવી ભૂમિતિની યોજના કોઈ અમુક ગણિતશાસ્ત્રીએ કરેલી નથી, પણ અનેક ગણિતશાસ્ત્રના શોધકોના પ્રયત્નથીજ તેણે હાલનું સ્વરૂપ ધારણ કર્યું છે: એ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ. આ નવી ભૂમિતિ જર્મનિ અને ફ્રાન્સ એ દેશોમાં ધણા વખત પહેલાં દાખલ થઈ હતી, અને ઇંગ્લાંડમાં તે થોડાજ વખત પર દાખલ થઈ છે. આ યોજનાને અનુસરીનેજ કેળવણીખાતાએ આ દેશમાં નવી ભૂમિતિ દાખલ કરી છે.

શિક્ષકોને સૂચના.



જે શિક્ષકોને આ વિષય છેક નવો છે, તેમણે આગળ આવતા ઉપોદ્ધાતમાં આપેલી નવી ભૂમિતિ સંબંધી માહિતી ધ્યાન દર્શાવવાની, અને તે યાદ રાખી આ વિષય શીખવવો. શીખવતી વખતે નીચેની બાબતો હંમેશાં ધ્યાનમાં રાખવી:—

(૧) આકૃતિના ધર્મો અનુમાનદ્વારા શીખવતા પહેલાં છોકરાઓ પાસે આકૃતિ કઢાવીને અને તેની બાબતો, ખુણા વગેરે મપાવીને તે ધર્મો પ્રત્યક્ષ જોવાવાળી જરૂર છે; તેથી ૧ થી ૧૫૦ સુધીનાં પાનાંમાંનો પ્રાયોગિક ભાગ કાળજીપૂર્વક શીખવવો જોઈએ.

(૨) આકૃતિઓ સંબંધી અથવા પ્રમેયો સંબંધી પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ કર્યા પછી, જે ધર્મો છોકરા પાસે કઢાવ્યા હોય, તે તેમને નોંધપોથીમાં નોંધી રાખવા કહેવું.

(૩) આકૃતિઓના ધર્મ અથવા પ્રમેયો ઝરાઝર સમજવા માટે આકૃતિઓ ઝરાઝર કાઢવી જરૂરની છે; માટે ભૂમિતિ શીખવતી વખતે શિક્ષકે આકૃતિઓ પાટીઆ પર ઝરાઝર કાઢવી. તેમજ જે આકૃતિઓ છોકરાઓએ કાઢવાની હોય, તે પણ તેમની પાસે સાધનોની મદદથી ભૂલ ન થાય એવી રીતે કાઢાવવી. આકૃતિ ઝરાઝર કાઢેલી હોય તો પ્રમેય વધારે સહેલાઈથી સમજી શકાય.

(૪) સર્વ વ્યાખ્યાઓ સામગ્રી શીખવવાને બદલે જેમ જેમ તેમની જરૂર જણાય તેમ તેમ તે એક પછી એક શીખવવી. વ્યાખ્યાઓ સામગ્રી શીખવી હોય તો તેમનો ખપ પડતા સુધીમાં તે ભૂલી જવાનો સંભવ રહે છે; તેથી આ યોજના જરૂરની છે.

(૫) વ્યાખ્યાઓ છોકરાઓને કહી દેવી નહિ, પણ ચોપડી-માં બતાવ્યા પ્રમાણે પ્રયોગ કરી છોકરાઓ પાસે તે કઢાવવી. વ્યાખ્યા છોકરાઓ પાસે કઢાવવી શક્ય ન હોય તો તે જુદી જુદી આકૃતિઓની મદદથી છોકરાઓને સ્પષ્ટ રીતે સમજાવવી. છોકરાઓને વ્યાખ્યાઓની સમજણ પડ્યા પછી તેમને લગતી આકૃતિઓ તેમની પાસે કઢાવવી તથા ઓળખાવવી.

(૬) જે પ્રમેયો વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાના હોય છે, તેમની સત્યતા જોડે પહેલાં પ્રાયોગિક ભાગ શીખતી વખતેજ તેમના ધ્યાનમાં આવી ગઈ હોય છે, તોપણ તે ભૂલી જવાનો સંભવ રહે છે. તેથી દરેક પ્રમેય શીખવતા પહેલાં તેની સત્યતાનો અનુભવ (પહેલાં એક વખતે તેમણે કર્યો હતો તેમ) પ્રત્યક્ષ પ્રયોગથી કરી કરાવવો, અને તેવો અનુભવ કરાવ્યા પછી “ હવે એજ બાબત આપણે અનુમાનથી સિદ્ધ કરીએ ” એમ કહી અનુમાનની મદદથી સિદ્ધતા શરૂ કરવી.



અનુક્રમણિકા.

	૫૪.
ઉપોદ્ધાત	૧-૯
ખંડ ૧લો (પ્રાયોગિક ભાગ) ...	૧૧-૧૨૮
પ્રકરણ ૧લું.	
૧ લીટી માપવા વિષે	૧૨
૨ સ્કેલ કે અંતરપ્રમાણ	૧૯
૩ ખુણો... ..	૨૪
૪ સાપેક્ષ દિશા	૪૬
૫ અમુક અંશનો ખુણો કરવા વિષે ...	૪૯
૬ એક લીટી ખીજ પર પડવાથી થતા ખુણા.	૫૦
૭ એક ખીજને છેદતી બે સીધી લીટી- ઓની વચ્ચે થતા ખુણા... ..	૫૫
૮ સમાંતર લીટીઓ	૫૮
૯ ત્રિકોણ	૬૯
૧૦ લંબ... ..	૯૮
૧૧ સમાંતરખાણુ ચતુષ્કોણ	૧૦૨
પ્રકરણ ૨જું.	
ભૂમિતિ એટલે શું ?	૧૧૧
પદાર્થ... ..	૧૧૧
લંબાઈ, પહોળાઈ અને જાડાઈ ...	૧૧૩
પૃષ્ઠ	૧૧૩
સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠ	૧૧૬
સપાટી	૧૧૭
લીટી... ..	૧૧૯
બિંદુ	૧૨૭
ખંડ ૨જો (પ્રમેય ૧-૨૫)... ..	૧૩૧-૧૯૫
ખંડ ૩જો (કૃત્ય ૧-૧૩)	૧૯૭-૨૨૦
પરિશિષ્ટ અ (પરચુરણ પ્રશ્ન) ...	૨૨૦-૨૩૩
પરિશિષ્ટ બ (પ્રશ્ન છોડવાની પૃથક્કરણ- પદ્ધતિ)	૨૩૪-૨૪૨
પ્રશ્નોના ઉત્તરો	૨૪૩-૨૪૪

ઉપોદ્ધાત.

નવી ભૂમિતિનાં ખાસ લક્ષણો નીચે પ્રમાણે છે:—

(૧) આકૃતિના ધર્મ (પ્રમેય-સિદ્ધાંત) અનુમાનથી સિદ્ધ કરતા પહેલાં પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ ઉપરથી તેમની સત્યતાની ખાતરી કરી આપવામાં આવે છે.

(૨) વ્યાખ્યા અને પ્રમેય-સિદ્ધાંત (પ્રમેયમાંના સામાન્ય નિયમો) વિગમન પદ્ધતિથી (વિશેષ દૃષ્ટાંતો પરથી સામાન્ય નિયમ ઉપર ઉતરવાની રીતથી) શીખવવાનો પ્રયત્ન કર્યો છે.

(૩) સિદ્ધાંતોનો ક્રમ યુક્લિડથી સહેજ જુદો છે; કેટલેક ઠેકાણે સિદ્ધતા પણ જુદી રીતે આપી છે; અને યુક્લિડમાંના કેટલાક બહુ જરૂરના ન હોય એવા સિદ્ધાંતો કાઢી નાખ્યા છે.

(૪) આકૃતિઓ બરાબર દોરવી ઘણી અવશ્યની ગણી છે. આ ફેરફાર કરવાનાં કારણો નીચે પ્રમાણે છે:—

(૧) ફોટો શી રીતે લેવો તેની માહિતી આપણને કોઈ મોઢેથી આપે, તો તે બરાબર સમજાશે નહિ એટલુંજ નહિ, પણ તે થોડાજ વખતમાં ભૂલી જવાશે. જો તેજ માહિતી આપણને પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ વડે કોઈએ આપી હોય, તો તે સારી રીતે સમજાશે, અને તે ઓછામાં ઓછા એક અઠવાડિયા સુધી તો ભુલાશે નહિ. પણ તેજ પ્રયોગ આપણે પોતાને હાથે કરીએ, તો તે બાબત ઉત્તમ પ્રકારે સમજાશે એટલુંજ નહિ, પણ તે આશરે એક વરસ સુધી યાદ રહેશે. કોઈ બાબતનું વર્ણન સાંભળવાથી, તે પ્રત્યક્ષ જોવાથી, અને તે જાતે કરવાથી, એ ત્રણ પ્રકારે મળતા જ્ઞાનમાં આવો તફાવત પડે છે. કોઈ પણ પ્રકારના જ્ઞાનને આ નિયમ લાગુ પડે છે. આ ઉપરથી એવો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે, કે કોઈ પણ વસ્તુનું જ્ઞાન એકલા વર્ણનથી

થાય છે, તે કરતાં વધારે જ્ઞાન તે વસ્તુ પ્રત્યક્ષ જોવાથી
 થાય છે, અને તેથી પણ વધારે જ્ઞાન તે વસ્તુ પ્રત્યક્ષ પો-
 તાને હાથે કરવાથી, અથવા તે વસ્તુનો ઉપયોગ પોતાને
 હાથે કરવાથી થાય છે. તેથી જ્ઞાન પાકું થાય અને મનમાં
 ખરાબર હસે એટલા માટે પ્રયોગ વિદ્યાર્થીએ જાતે કરવા
 અવશ્યના છે. ભૂમિતિનાં સત્યો વ્યવહારમાં આપણી નજરે
 પડતાં ન હોવાથી તેમને દૃશ્ય રૂપમાં જોવાની આવશ્યકતા
 વિશેષ છે. એમ હોવાથી પહેલાં આ વિષય કેવળ વ્યાખ્યા-
 નદ્વારા શીખવાતો હતો તેથી શું પરિણામ આવતું હતું તે
 આપણે સૌ જાણીએ છીએ. ભૂમિતિ એ વિષય ઘણોજ ક-
 ઠણ ગણાતો હતો એ વાતજ ખાતરીપૂર્વક સિદ્ધ કરી આપે
 છે, કે આ વિષય શીખવવાની જીની પદ્ધતિ અયોગ્ય અને
 કઠણ હતી. ‘કાટખુણો’ ‘સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ’ વગેરે
 સંજ્ઞામાં, અથવા ‘ત્રિકોણના ત્રણ ખુણા મળીને એ કાટખુણા
 ખરાબર હોય છે,’ એવા એકાદ સિદ્ધાંતમાં રહેલી કલ્પના
 “પ્રત્યક્ષ આકૃતિથી અને પ્રયોગથી સ્પષ્ટ કરી બતાવો”
 એમ કહ્યું હોત, તો (યુક્લિડના ૧લા પુસ્તકના ૩૨ સિ-
 દ્ધાંત જેમને ચાલ્યા છે એવા વિદ્યાર્થીઓ પૈકી) કેટલા થોડા
 વિદ્યાર્થીઓ એવા પ્રશ્નનો સંતોષકારક જવાબ આપી શકત,
 એ વાતનો વિચાર કરીએ તો જીની પદ્ધતિ કેટલી અયોગ્ય
 હતી એ સમજી શકાશે. આ પદ્ધતિને લીધે છોકરાઓનું
 આકૃતિના ધર્મોનું જ્ઞાન ઘણુંજ અધુરું રહેતું અને ઘણો ખરો
 વિષય તેમને ગોખવો પડતો હતો. આ સ્થિતિ દૂર કરવા
 માટે, આકૃતિના સંબંધમાં છોકરાઓ પાસે પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ
 કરાવવા એજ એક ઉપાય છે. સમાંતર લીટીઓને છેદતી
 લીટીથી થતા બ્યુટકમ ખુણા સરખા હોય છે, એ વાત
 યુક્લિડના ૨૯મા સિદ્ધાંતની શાબ્દિક સિદ્ધતા કહ્યા પછી
 જેટલી યાદ રહેશે, તે કરતાં તે ખુણા સરખા હોય છે એ

વાત પ્રત્યક્ષ પ્રયોગથી બતાવી હોય તો વધારે સારી રીતે યાદ રહેશે; અને તેજ વાતની ખાતરી વિદ્યાર્થીઓ પોતાને હાથે કરેલા પ્રયોગ વડે કરી જુએ, તો પાકી ધ્યાનમાં રહેશે એ તદ્દન ખુલ્લું છે. આ ઉપરથી ભૂમિતિના નિયમો ધ્યાનમાં રાખવામાં વિદ્યાર્થીઓએ જાતે કરેલા પ્રયોગ તેમને મદદ કરે છે એ નિર્વિવાદ છે. તેથી આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી અને તેમના ધર્મ તપાસી જોવા એ જ બાબતને નવી ભૂમિતિમાં પ્રાધાન્ય આપવામાં આવ્યું છે.

(૨) વિગમનપદ્ધતિની મદદથી વ્યાખ્યાઓનું અને સિદ્ધાંતોનું જ્ઞાન આપવા વિષે.—પારિભાષિક સંજ્ઞા અને સિદ્ધાંતોનો સાધારણ ખ્યાલ આવે તે માટે તે સંજ્ઞાઓ તથા સિદ્ધાંતોમાં દર્શાવેલી બાબતોનું પ્રત્યક્ષ અવલોકન જેમ આવશ્યક છે, તેમજ તે સંબંધનું જ્ઞાન પાકું થાય અને લાંબા વખત સુધી ટકે તે માટે તે બાબતોનું અવલોકન કર્યા પછી છોકરાઓએ પોતેજ માનસિક પ્રયત્ન કરવાની જરૂર છે. આપણે જાણીએ છીએ કે જે વાતો આપણે પોતાની બુદ્ધિના શ્રમથી શીખીએ છીએ, તે આપણને બરાબર સમજાય છે એટલુંજ નહિ, પણ તે પાકી ધ્યાનમાં રહે છે; અને જે વાતો આપણે બીજા લોકો પાસેથી શીખીએ છીએ તે તેટલી સારી પેઠે સમજાતી નથી, અને તે આપણા ધ્યાનમાં લાંબો વખત રહેતી પણ નથી. છોકરાઓના મનની સ્થિતિ પણ એવીજ હોય એ સ્વાભાવિક છે; એટલે જે જ્ઞાન છોકરા પોતાના શ્રમથી મેળવે છે તે તેમના મનમાં બરાબર ઠસે છે; માટે વ્યાખ્યા અને સિદ્ધાંતનું જ્ઞાન ચાલતાં સુધી છોકરા પોતાની મહેનતથી મેળવે એમ કરવું. એમ કરવાનો યોગ્ય માર્ગ એ છે, કે જે વસ્તુઓના ધર્મોનું જ્ઞાન છોકરાઓને આપવું હોય,

તે વસ્તુઓના જુદા જુદા પ્રકાર છોકરા આગળ મૂકવા, અને છોકરાઓ પાસે તેમની સરખામણી કરાવીને તે ઉપરથી થતાં અનુમાન છોકરા પાસે કઢાવવાં. એટલા માટે નવી ભૂમિતિમાં વ્યાખ્યા શીખવવાની પદ્ધતિ એવી છે, કે જે આકૃતિની વ્યાખ્યા છોકરાઓને શીખવવી હોય, તે આકૃતિ તેમની પાસે કઢાવીને તેની બાજુઓ, ખુણા વગેરે ભાગોની પરીક્ષા તેમનીજ પાસે કરાવવી; પછી તેજ જાતની બીજા પ્રકારની આકૃતિઓ કઢાવીને તેમની એક બીજી સાથે સરખામણી કરાવવી; અને આ સરખામણી પરથી જે સામાન્ય ધર્મ જણાઈ આવે તેની મદદથી વ્યાખ્યા ઉપજાવવી. પ્રમેયોનું ખરાપણું નક્કી કરવાની રીત પણ એવીજ છે; એટલે પ્રમેયોના અનેક પ્રત્યક્ષ દાખલા લેવા અને તે પરથી સામાન્ય સિદ્ધાંત નક્કી કરવો.

કોઈ પણ નિયમ કે સિદ્ધાંત નક્કી કરવાની બે પદ્ધતિ છે: એક, બીજા સામાન્ય નિયમોને આધારે તે નિયમ નક્કી કરવાની; અને બીજી, પ્રત્યક્ષ વિશેષ દાખલાઓ વડે તે નિયમ નક્કી કરવાની. આ પૈકી હમણાં ઉપર વર્ણવી તે પદ્ધતિ બીજા પ્રકારની છે. પહેલી પદ્ધતિમાં દોષ એ છે, કે શબ્દોના અર્થના અનિશ્ચિતપણાને લીધે અને જે સામાન્ય નિયમને આધારે અમુક નિયમ નક્કી કરવાનો હોય તેને અપવાદ હોવાથી, તેમજ જુદાં જુદાં વિધાનો (કહેલી બાબતો) ઉપરથી નિર્દોષ અનુમાન શી રીતે કાઢવું એ વિષેના (લોકોના) અજ્ઞાનને લીધે, આ પદ્ધતિથી નક્કી કરેલો સિદ્ધાંત કોઈ કોઈ વખતે ખોટો પડે છે. પરંતુ બીજી પદ્ધતિમાં ઉદાહરણો ઉપરથી સિદ્ધાંત ઠેરવવાનો હોવાથી, જોઈએ તેટલાં જુદાં જુદાં ઉદાહરણો લીધાં હોય તો સિદ્ધાંત ખોટો કરવાનો સંભવ ઘણો યોડો હોય છે. માટે ખરા સિદ્ધાંત ઉપજાવવાને આ પદ્ધતિ ખાસ ઉપયોગી છે. તે ઉપરાંત આ

પદ્ધતિમાં પ્રત્યક્ષ ઉદાહરણો ઉપરથી સિદ્ધાંત ઉપજાવવાનો હોવાથી સિદ્ધાંત સહેલાઈથી સમજી શકાય છે. માટે આ પદ્ધતિની માહિતી અને વિશેષ પરિચય થવાની જરૂર છે, તેથી આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ નવી ભૂમિતિમાં કર્યો છે.

જો કે ખરો સિદ્ધાંત નક્કી કરવા માટે નિગમનપદ્ધતિ (સામાન્ય નિયમ પરથી વિશેષ નિયમ ઉપજાવવાની પદ્ધતિ) કરતાં વિગમનપદ્ધતિ વધારે ઉપયોગી છે, તોપણ એટલા ઉપરથીજ નિગમનપદ્ધતિ છેક નકામી ઠરતી નથી. કારણ ઘણી વાર એવું બને છે કે પહેલી પદ્ધતિથી સિદ્ધાંત નક્કી કરવાને જે ઉદાહરણો જરૂરનાં છે તે કોઈ કોઈ વખતે તો મળતાં પણ નથી, અને કોઈ કોઈ વખતે મળી શકે એમ હોય તોપણ તે જોવાને પુરતો વખત હોતો નથી. એવે વખતે અનુમાનથીજ સિદ્ધાંત નક્કી કરવો પડે છે. ન્યાયાધીશને ચુકાદો આપવાના કામમાં, તેજ પ્રમાણે ઐતિહાસિક શોધ કરનારને, ભૂસ્તરશાસ્ત્રીને, તેમજ ખગોળશાસ્ત્રીને ભૂતકાળની અને અદૃશ્ય વાતો વિષે સિદ્ધાંત નક્કી કરવાના કામમાં આ પદ્ધતિ ખાસ ઉપયોગી થાય છે. પોતાની પાસે થોડાજ વખત પર આવેલો કોઈ માણસ કેવાં લક્ષણવાળો હશે, ક્યારે જઈએ તો અમુક માણસ નક્કી ઘેર મળશે,.....વગેરે રોજના વ્યવહારમાંની વાતો અનુમાનથીજ નક્કી કરવી પડે છે. તેથી આ પદ્ધતિની પણ માહિતી અને પરિચય હોવાં જરૂરનાં છે; માટે ચુક્લિડની ભૂમિતિમાંની અનુમાનપદ્ધતિ પણ નવી ભૂમિતિમાં કાયમ રાખી છે.

સારાંશ એ છે કે નિયમ બરાબર સમજાય અને મનમાં બરાબર ઠસે એટલા માટે પ્રથમ વિગમનપદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો, અને પહેલાં નક્કી કરેલા સામાન્ય નિયમ ઉપરથી બીજા સિદ્ધાંતો, નિયમો, અથવા અનુમાનો શી રીતે કાઢવાં તે છોકરાઓ સમજે એટલા માટે પછીથી નિગમનપદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો, એવી વ્યવસ્થા નવી ભૂમિતિમાં છે.

(૩) ક્રમ વગેરે આપતોમાં યુક્તિહીન જીવ-
પણું.—અસાધારણ પ્રુદ્ધિવાળા કોઈ પણ પુરુષે કરેલું કામ
સર્વ અંગે પરિપૂર્ણ હોયજ એમ નથી. માણસે કરેલું કામ
ગમે તેટલું ઉત્કૃષ્ટ હોય, તોપણ તેમાં દોષ હોવાનાજ. હોમર,
એસ્કિપયર, કાળિદાસ એમનાં કાવ્યો અને પ્લેટો, એરિસ્ટોટલ,
ડાર્વિન, સ્પેન્સર, ભાસ્કરાચાર્ય, પાણિનિ ઇત્યાદિ પંડિતોના
તાત્ત્વિક અને શાસ્ત્રીય ગ્રંથો પોતાની જાતના ગ્રંથોમાં જો
કે અદ્વિતીય છે, તોપણ તેમાં સહેજસાજ દોષો કે ખામીઓ
છેજ. તેવીજ રીતે કેટલાક દોષ યુક્તિહીની ભૂમિતિમાં પણ
છે. તોપણ યુક્તિહીમાં કેટલાક દોષ છે એ વાતથી યુક્તિહી-
ની યોગ્યતા ઓછી થતી નથી. એક પ્રુદ્ધિમાન ઇંગ્લેન્ડે
એકાદ વિકટ ઘાટમાંનો રસ્તો ગમે તેટલી કુશળતાથી તૈયાર
કર્યો હોય, તોપણ તે રસ્તામાં પાછળથી થોડો ઘણો ફેરફાર
કરવાની જરૂર પડે છેજ. તેવીજ સ્થિતિ યુક્તિહીની ભૂમિતિની
છે. યુક્તિહી સિદ્ધાંતોનો જે ક્રમ ઠેરવ્યો છે તે જો કે એકંદરે
સારો છે, તોપણ તેમાં કેટલેક ઠેકાણે ફેરફાર કરવો જરૂરનો
જણાયો છે. દાખલા તરીકે—યુક્તિહીના ૧લા પુસ્તકમાંના ૨
અને ૩ એ સિદ્ધાંતો કાઢી નાખીએ તોપણ ચાલે એમ છે.
ચોથા અને પાંચમા સિદ્ધાંત કરતાં ૧૩, ૧૪, ૧૫ એ સિદ્ધાંતો
સહેલા હોવાથી અને તે સીધી લીટી વિષેના હોવાથી, તે
પહેલાં લેવા એ વધારે સગવડ ભરેલું છે. તેમજ યુક્તિહીના
પહેલા પુસ્તકમાંનો ૮મો સિદ્ધાંત અને બીજા પુસ્તકનો
૧૩મો સિદ્ધાંત એમની જે સિદ્ધતા યુક્તિહી આપી છે, તેના
કરતાં નવી ભૂમિતિમાં આપ્યા મુજબ સહેલી સિદ્ધતા આપ-
વી બની શકે એમ છે.....વગેરે. એ પ્રમાણે યુક્તિહીની
ભૂમિતિમાં ફેરફાર કરવો અવશ્ય છે, એ કોઈ પણ જોઈ
શકશે. આ કારણથી, જે ફેરફાર કરવાથી વિષય સહેલો થાય
એમ લાગ્યું તેવા ફેરફાર નવી ભૂમિતિમાં કર્યા છે.

(૪) કંપાસ અને માપવાની પટ્ટી વગેરેની મદદથી આકૃતિ બરાબર કાઢવા વિષે:—

આકૃતિના ધર્મ નક્કી કરવા એ ભૂમિતિનું મુખ્ય કામ છે. જે આ વિષયમાં ‘સમબાણુ ત્રિકોણના ખુણા સરખા હોય છે,’ ‘આ ખુણો પેલા ખુણાથી મોટો છે,’ ‘આ લીટી પેલી લીટીથી મોટી છે,’ વગેરે બાબતો સિદ્ધ કરવી હોય, તો એવી સરખામણી કરવા માટે આ આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી જરૂરની છે, એ કોઈ પણ સમજી શકશે. સમબાણુ ત્રિકોણ, લંબચોરસ, ત્રિકોણમાંની મધ્યગા, સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ વગેરે આકૃતિઓ બરાબર કાઢી હોય, તો સમબાણુ ત્રિકોણના ખુણા સરખા હોય છે, લંબચોરસના કર્ણ સમાન હોય છે, ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં એક બીજાને છેદે છે, સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે, એ વગેરે બાબતો તરતજ સમજાય છે. એથી ઉલટું, જે આકૃતિ બરાબર કાઢી ન હોય, તો ઉપલી બાબતો સહેજમાં સમજાતી નથી એટલુંજ નહિ, પણ જે બાબતો આપણે અનુમાનથી સિદ્ધ કરીએ છીએ, તેમના ખરાપણા વિષે પણ શંકા ઉત્પન્ન થાય છે. દાખલા તરીકે—‘એકજ ત્રિકોણમાંના સરખા ખુણાની સામેની બાણુઓ સરખી હોય છે,’ આ પ્રમેય સિદ્ધ કરતી વખતે ખુણા સરખા કાઢેલા ન હોય તો તે ખુણાની સામેની બાણુઓ નાની મોટી આવશે; અને તેમનું નાનામોટાપણું સ્પષ્ટ હોવાથી, આપણે તેમને સરખી કહીએ છીએ એ બરાબર છે કે કેમ, એવી શંકા, સ્વાભાવિક રીતે ઉત્પન્ન થશે. આ કારણથી આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી જરૂરની છે.

આકૃતિઓ બરાબર કાઢવા માટે કંપાસ, માપવાની પટ્ટી વગેરે સાધનોની આવશ્યકતા છે. તેથી આ સાધનોનો ઉપ-

યોગ કરવો એ પણ નવી ભૂમિતિનું એક ખાસ લક્ષણ છે. યુક્તિલડમાં કંપાસ અને આંકણી એ સાધનોથી આકૃતિઓ કાઢવાનું કહ્યું છે; પણ એવી આકૃતિઓ દોરી છે એમ ધારી લેવાનો રિવાજ પડી ગયો હતો. નવી ભૂમિતિમાં તો એવી છટ આપવામાં આવતી નથી.

નવી ભૂમિતિનાં બીજાં ગૌણ લક્ષણો નીચે મુજબ છે:—

(૧) કોઈ પણ વિધાનના આધાર માટે ‘ફલાણો સિદ્ધાંત’ એમ કહી સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક આપવાની આ ભૂમિતિમાં આવશ્યકતા નથી. આધાર માટે સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક કહેવાની પદ્ધતિને લીધે, અમુક સિદ્ધાંતમાં શું છે તેની દરકાર ન રાખતાં વિદ્યાર્થીઓ સિદ્ધાંતોના ક્રમાંક ગોખી રાખે છે. એનું પરિણામ એવું આવે છે, કે તેઓ જે વિધાન કરે છે તેને વાસ્તવિક રીતે ક્યાં કારણોનો આધાર છે તેનું તેઓને જ્ઞાન હોતું નથી. ‘જ્ઞ પ્રણો = જ્ઞ પ્રણો,—આધાર રહ્યો સિદ્ધાંત’—એવું એક વખતે ગોખી રાખ્યું હોય, તો એક પ્રણો બીજા પ્રણો બરાબર છે એમ કહેવા માટે ક્યાં કારણોની જરૂર છે, એ વાત સારી પેઠે ધ્યાનમાં રહેતી નથી; અને જે વ્યુત્ક્રમ પ્રણો ખરું જોતાં બરાબર ન હોય તોપણ તે બરાબર છે એમ ધારવાનું મનમાં આવ્યું, કે રહ્યો સિદ્ધાંત પ્રમાણે તે બરાબર છે એવું એકદમ છોકરાના મોઢેથી નીકળી જાય છે. એમ ન થાય એટલા માટે આધાર આપતી વખતે છોકરાઓ પાસે સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક કહેવડાવવાને બદલે જે પક્ષ ઉપરથી સાધ્ય નીકળે છે તે પક્ષ તેમની પાસે કહેવડાવવાની પદ્ધતિ નવી ભૂમિતિમાં છે. તોપણ આધાર હંમેશાં એવી રીતે આપવોજ જોઈએ એમ નથી; કારણ કે છોકરાઓને એક વખત કારણ ધ્યાનમાં લઈને પછી વિધાન કરવાની ટેવ પડી ગઈ, એટલે પછી તેમને આધાર માટે સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક કહેવાની છટ આપી હોય તોપણ ચાલે.

આ પુસ્તકમાં આધાર કહેતી વખતે સિદ્ધાંતના ક્રમાંકજ આપ્યા છે; પણ જગાનો ખચાવ કરવા માટેજ એમ કર્યું છે. તેનું અનુકરણ, શરૂઆતમાં તો, વિદ્યાર્થીઓએ સર્વથા ન કરવું.

(૨) ચિહ્નોનો ઉપયોગ.—

અ ખુણા બ ખુણા ખરાબર છે, અથવા બ થી મોટો છે, એમ લખવાને બદલે \angle અ $=$ \angle બ અથવા \angle અ $>$ \angle બ એમ લખવું સહેલું છે અને તે વધારે વ્યવસ્થિત દેખાય છે; અને તે વાંચવું પણ વધારે સગવડ ભરેલું લાગે છે; માટે નવી ભૂમિતિમાં ચિહ્નોનો છૂટથી ઉપયોગ કર્યો છે. પરીક્ષામાં આ ચિહ્નોનો ઉપયોગ કરવા માટે પહેલાં પરીક્ષકોની સંમતિની જરૂર હતી, પણ હવે તેવી સંમતિની જરૂર નથી.

(૩) આધાર માટે પ્રત્યક્ષપ્રમાણ અને સ્વીકૃતકૃત્યોનો નામ દઈને ઉપયોગ કરવાની જરૂર નથી. પ્રત્યક્ષપ્રમાણ અને સ્વીકૃતકૃત્યોનો આધાર જે બાબત માટે લેવાનો હોય છે તે ‘પ્રત્યક્ષ’ અને ‘સહેજ સમજાય એવી’ હોય છે, માટે એવી બાબતોને સ્વતંત્ર આધારની જરૂર નથી.



સૂચના.—ભૂમિતિના વિષયની માહિતી પ્રયોગદ્વારા વિદ્યાર્થીઓને શી રીતે કરી આપવી તેનું દિગ્દર્શન કરાવવાના ખાસ હેતુથીજ આ પુસ્તકના ૧લા ખંડમાંની માહિતી આપી છે. તે શિક્ષકોએ ખાસ વાંચવી અને તેમાં કહ્યા પ્રમાણે વિદ્યાર્થીઓ પાસે કૃતિ કરાવવી.



शुद्धिपत्र.

पृष्ठ	लीटी.	अशुद्ध.	शुद्ध.
६(प्रस्तावना)	१०	१थी १५०	११थी १२८
३२	२१	पिंडुनी	पिंडुनी
६५	१५	अवफ	अव
६५	१५	झलु	झर्ण
६६	१६	भील पती डे	पती डे भीलुं
६८	७	अकथी	त्यांथी, अकथी
६१८	१०	अ पिंडु	अ पिंडु
७०	२	परना	परनां
७०	२	वम्येना	वम्येनां
७४	(१क्षी आकृतिमां)	ड	क
"	"	क	ड
१०६	२७	पुलु	पुलु
१५५	२८	चक	कच
१६१	२३	आणुओना	आणुओनां
१६१	२५	आणुओना	आणुओनां
१६४	२६	अव ह	अवक
१६६	१	इ	ई
१६८	२	∠अवक=∠डफई, अकव=∠डफई.	
१८५	१२	∠क	तो ∠क
१८४	१	खई	खई
२०२	(आकृतिमां)	३०°	३०°
"	"	६०°	६०°
"	७	अड,अई	अड,अई,फड,फई
"	७	सिद्धता	सिद्धता
२०४	१७	क	क
२०१८	१५	क	क
२१०	१	क	क
२१६	७	अव	अव
२१६	१०	कक परिधनी	परिधनी
२२२	१३	कक	कक
२३४	२६	अवश्यनुं	अवश्यनुं

નવી ભૂમિતિ.

ભાગ ૧લો.

ખંડ ૧લો.

(પ્રાયોગિક ભાગ.)

વિદ્યાર્થીઓને અવશ્ય જોઈતાં સાધનો.

માપ લેવાની પટ્ટી.—જેના પર ઇંચ અને ડેસિમીટર, તથા તે ખંનેના અંશ અથવા ભાગ ખતાવેલા હોય એવી પટ્ટી. [જે પટ્ટીના એકજ પૃષ્ઠની ખંને કોરો ઢાળ પડતી હોઈ, એક કોર પર ઇંચ અને બીજી કોર પર મીટરના ભાગ ખતાવ્યા હોય એવી પટ્ટી વધારે સારી.]

સેટ સ્ક્વેર કે ત્રિકોણમાપ.—(૧) જેના ખુણા ૯૦° , ૬૦° , અને ૩૦° ના હોય, અને જેનો કર્ણ (સૌથી લાંબી બાજુ) આશરે ૬ ઇંચ હોય, એવું ત્રિકોણમાપ. (૨) ૯૦° , ૪૫° , અને ૪૫° ના ખુણાવાળું ત્રિકોણમાપ. [આ ન હોય તોપણ ચાલે.]

વિભાજક (જેનાં ખંને પાંખાં અણીવાળાં હોય છે તે) અને **કંપાસ** (જેના એક પાંખામાં પેન્સિલ ખોસાય છે તે.)—[જેમાં જરૂરિયાત પ્રમાણે પેન્સિલ કે પોલાદી અણીઉં ખેસાડી શકાય એવો કંપાસ હોય તો જુદા વિભાજકની જરૂર નહિ પડે.]

એચ પેન્સિલ.—૨ એચ કે ૩ એચની પેન્સિલ હોય તો વધારે સારું. બની શકે તો ૩ એચની પેન્સિલનો ઉપયોગ કરવો.

[કંપાસની પેન્સિલની અને આકૃતિ કાઢવાની પેન્સિલની અણી પૉલિશ પેપરથી (કાચ પાએલા કાગળથી) ઘસીને હંમેશાં ઝીણી રાખવી. આકૃતિ કાઢવાની પેન્સિલની અણી સોયના જેવી ઝીણી ન રાખતાં ફરસીના જેવી ચપટી રાખવી.]

કોણુમાપક.—(પ્રોટ્રક્ટર)—અર્ધવર્તુળાકાર કોણુમાપક કરતાં ચતુષ્કોણુ કોણુમાપક વધારે સારો ખરો; પણ શરૂઆતમાં અર્ધવર્તુળાકાર કોણુમાપકનો ઉપયોગ કરવો સહેલો પડે છે, માટે તેનોજ ઉપયોગ કરવો.

તે સિવાય ટ્રેસ કરવાનો કાગળ, ચોરસ આંકેલી એક્સ-સાઈઝ બુકો,* દોરો, ટાંકણી વગેરે.

[પ્રયોગ ઉપરથી જે અનુમાન નીકળે છે તે વિદ્યાર્થી-ઓએ એક જુદીજ નોંધપોથીમાં નોંધી રાખવાં.]

લીટીઓ માપવા વિષે.

લીટીઓ માપવા માટે પટ્ટી અને વિભાજક વપરાય છે.

માપ લેવાની પટ્ટી (અથવા કુટપટ્ટી અને મીટર-પટ્ટી)—આ પટ્ટી પર એક કોરે ઇંચ અને ઇંચના દશાંશ, તથા બીજી કોરે મીટરના+ ભાગ જણાવેલા હોય છે. એક

* ભૂમિતિના બીજા ભાગમાં વાપરવા માટે.

* મીટર—જુદા જુદા દેશમાંનાં વજન તથા માપ જુદાં જુદાં હોવાથી વેપારને તેમજ બીજા વ્યવહારને ભારે હરકત નડે છે. લોકોને આજ ધણું વર્ષ થયાં તે દૂર કરવાની ઇચ્છા થઈ છે; પરંતુ આ કામ માટે ફ્રેંચ સિવાય બીજા કોઈ લોકો આગળ આવ્યા નથી. તેમણે આજથી આશરે ૭૫ વર્ષ પહેલાં જુનાં

મીટર એટલે આસરે ૩૯.૩૭ ઇંચ થાય છે. મીટરના ડેસિ-મીટર, સેન્ટિમીટર, મિલિમીટર એવા ભાગ છે. પટ્ટી પર દર્શાવેલા મીટરના ભાગ પૈકી સૌથી નાનો ભાગ (પાસ પાસેની બે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર) મિલિમીટર છે.

મીટરનું કોષ્ટક.

(મિલિમીટર = $\frac{1}{1000}$ મીટર).

૧૦ મિલિમીટર = ૧ સેન્ટિમીટર (= $\frac{1}{10}$ મીટર)

૧૦ સેન્ટિમીટર = ૧ ડેસિમીટર (= $\frac{1}{10}$ મીટર)

૧૦ ડેસિમીટર = ૧ મીટર

૧૦ મીટર = ૧ ડીકામીટર (= ૧૦ મીટર)

૧૦ ડીકામીટર = ૧ હેક્ટોમીટર (= ૧૦૦ મીટર)

૧૦ હેક્ટોમીટર = ૧ કિલોમીટર (= ૧૦૦૦ મીટર)

આ ભૂમિતિમાં ઉપલાં છેલ્લાં ત્રણ માપનો ખીલકુલ ઉપ-

વજન અને માપ બંધ કરીને તેમની જગાએ નિયમિત પ્રમાણમાં (દશકથી) વધતાં અને ઘટતાં નવાં માપ યોજ્યાં. માપ માટે પ્રથમ પરિમાણ જે લેવું તે ગમે તે એક સંકેત નક્કી કરીને નહિ, પણ કોઈ અમુક નિશ્ચિત અને સર્વસામાન્ય પરિમાણને આધારે લેવું, એમ વિચારીને તેમણે પૃથ્વીના એક અમુક યામ્યોત્તરવૃત્ત ઉપરથી લંબાઈનું મૂળ પરિમાણ નક્કી કર્યું છે, અને તેને મીટર એ નામ આપ્યું છે. મીટર એ પારિસમાં થઈ જતા યામ્યોત્તર-વૃત્તનો $\frac{1}{40000000}$ ભાગ છે. આ મીટર ઉપરથીજ તેમણે બધાં વજન અને માપ નક્કી કર્યાં છે. દાખલા તરીકે-આર અથવા ૧૦૦ ગ્રામ મીટર એ ક્ષેત્રફળનું મૂળ પરિમાણ છે. એક ઘન સેન્ટિમીટર પાણીનું (૩૯.૨ ફેરેનહાઈટ ઉષ્ણતામાને) વજન, કે આમ તે વજનનું મૂળ પરિમાણ છે; અને લિટર અથવા એક ઘન ડેસિમીટર એ અનાજ વગેરેના ભરતલના માપનું મૂળ પરિમાણ છે.

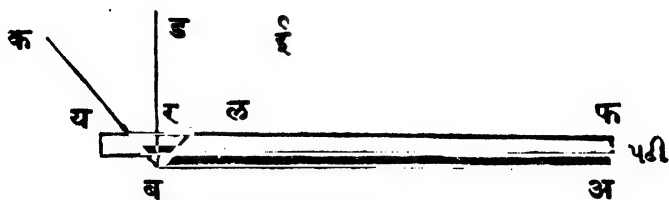
યોગ નથી, તેથી વિદ્યાર્થીએ તે ધ્યાનમાં રાખવાની જરૂર નથી.

પટ્ટી ઉપરના ઇંચ અને તેના દશાંશ, અને તેવીજ રીતે મીઠરના ભાગ છોકરાઓ બરાબર સમજ્યા છે એવી પોતાની ખાતરી કરી. લઈ પછી છોકરાઓ પાસે લીટીઓ મપાવવી.

લંબાઈ કે અંતર માપવાની ચોકસ રીત.—કોઈ અમુક લીટીની લંબાઈ કે બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર ચોકસાઈથી માપવા માટે વિભાજકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ રીત નીચે પ્રમાણે છે:—જે અંતર માપવું હોય, તે કરતાં જરા વધારે અંતર વિભાજકની અણીઓ વચ્ચે રહે એમ વિભાજક ઉઘાડવો; પછી હળવે રહી દબાવીને અણીઓની વચ્ચેનું અંતર ઓછું કરતાં કરતાં બે અણી આપેલી લીટીના બે છેડા પર બરાબર આવે એમ કરવું. પછી વિભાજકની અણીઓ પટ્ટી પર મૂકી પટ્ટી પરનું અંતર ગણવું. (વિભાજકનાં પાંખાં પટ્ટી પર ઉભાં ન રાખતાં ત્રાંસાં કે આડાં રાખવાં; એમ કરવાથી વિભાજકની અણી પટ્ટીને વાગવાથી પટ્ટીને કાણું પડવાની બીક રહેશે નહિ.)

ખાસ ચોકસાઈની જરૂર ન હોય ત્યારે લીટી માપવા માટે ફક્ત પટ્ટીનો ઉપયોગ કરવો. પટ્ટીથી લીટી માપવી હોય, તો તે કામ માટે લંબાઈની બંને બાજુએ ઢાળ પડતી હોય એવી પટ્ટી સારી પડશે.

પટ્ટી બંને બાજુએ ઢાળ પડતી ન હોય, તો પટ્ટી લીટી પર મૂક્યા પછી, લીટીનો છેડો પટ્ટી પરની કઈ નિશાનીની નીચે આવે છે તે જોવા માટે લીટીના છેડાની ઉપલી બાજુએ લંબમાં આંખ મૂકીને જોવું. લંબમાં ન જોતાં વાંકું જોયું હોય તો લીટીનો છેડો ખરેખર જે કાપા નીચે હોય છે તેનાથી કોઈ જુદાજ કાપા નીચે દેખાય છે. એમ કેમ બને છે તે નીચેની આકૃતિ ઉપરથી જણાઈ આવશે.



(પટ્ટીની ઉપલી આકૃતિમાં ઉભી લીટી પટ્ટીની જડાઈ દર્શાવે છે, એ ધ્યાનમાં રાખવું.)

ધારો કે અબ લીટીની લંબાઈ માપવી છે. જોનારની આંખ બડ લંબના ડ બિંદુ પાસે હશે, તો બ છેડો ર બિંદુની નીચે દેખાશે, અને અબ લીટીની લંબાઈ ફર જેટલી લાગશે. જો આંખ ઈ સ્થાનમાં હશે, તો અબ લીટીની લંબાઈ ફલ જેટલી લાગશે; આંખ ક સ્થાને હશે, તો અબની લંબાઈ ફય જેટલી લાગશે.

પ્રશ્નો.

૧. અબ લીટીની લંબાઈ ઇંચ અને મિલિમીટરમાં માપો.*

અ ————— બ

૨. આ પુસ્તકની લંબાઈ અને પહોળાઈ ઇંચ અને મિલિમીટરમાં માપો.

૩. ઉપલા પ્રશ્નોના જવાબ ઉપરથી એક ઇંચમાં કેટલાં મિલિમીટર આવે છે તે શોધી કાઢો. વિભાજકની અણીઓનું અંતર ૩.૯ ઇંચ રાખો, અને તે અણીઓ પટ્ટી પર મિલિમીટરોની બાજુએ મૂકીને તેમાં કેટલાં સેન્ટિમીટર અને મિલિમીટર આવે છે તે શોધી કાઢો.

૪. માપવાની પટ્ટીની મદદથી નીચેની બે લીટી પૈકી દરેકની લંબાઈ મીટર અને ઇંચના દશાંશમાં કહો.

* લંબાઈ કે અંતર ઇંચ અને ઇંચના દશાંશ તથા મિલિમીટરમાં આપવામાં આવે છે.

૫. અક, કબની લંબાઈ ઇંચમાં માપો અને તેમનો સરવાળો કરો. પછી અબની લંબાઈ માપીને પહેલો જવાબ ખરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

| | |
અ ક બ

૬. અક, કડ, કબની લંબાઈ ઇંચમાં માપો અને તેમનો સરવાળો કરો. પછી અબની લંબાઈ માપીને પહેલાંનો જવાબ ખરાબર છે કે નહિ તે જુઓ.

મિલિમીટરમાં પણ લંબાઈ માપીને ઉપલા બંને પ્રશ્નના અ ક બ જવાબ કાઢો.

૭. અબ લીટીની લંબાઈ માપો. અકની લંબાઈ માપીને તે અબમાંથી બાદ કરો, એટલે કબની લંબાઈ નીકળશે. કબની લંબાઈ પ્રત્યક્ષ માપીને પહેલાંનો જવાબ ખરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

| | |
અ ક બ

૮. ૨.૭ ઇંચ લાંબી લીટી લો, અને તેમાં ગમે ત્યાં એક બિંદુ લઈને તેનાં બંને છેડેથી અંતરો માપો. તેમનો સરવાળો કરો, અને તે ૨.૭ થાય છે કે નહિ તે જુઓ. થતો ન હોય તો ભૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

૯. અબ લીટી ૪.૫" * લો. તેમાં અક=૧.૨", કડ=૨.૬" લઈને કબની લંબાઈ માપો. તે ખરી લંબાઈની સાથે

* " આ ચિહ્નનો અર્થ ઇંચ થાય છે. દાખલા તરીકે ૧.૨" એટલે ૧.૨ ઇંચ.

મળતી આવે છે કે કેમ તે જુઓ. મળતી આવતી ન હોય તો ભૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

૧૦. એક ૬.૬"ની લીટી લો. તેના ૧:૫ના પ્રમાણમાં હોય એવા બે ભાગ કરો.

(નીચેના ૧૧-૧૬ પ્રશ્નો પહેલે ફેરે મૂકી દીધા હોય તોપણ ચાલે.)

૧૧. એક લીટી લઈને તેની લંબાઈની અટકળ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને તમારી અટકળ કેટલે દરજ્જે ખરી છે તે જુઓ. (પુ૦)×

૧૨. ૩.૬" લીટી લઈને તેના અર્ધા ભાગની લંબાઈ ગણિતથી નક્કી કરીને તેટલો ભાગ કાપો. બાકી રહેલા ભાગની લંબાઈ માપીને તે થવી જોઈએ તેટલી છે કે કેમ તે જુઓ.

૧૩. ૩૩ મિ. મી.+ લીટી લઈને તેનો ત્રીજો ભાગ ગણિતથી નક્કી કરીને તેટલા મોટા બે ભાગ તે લીટીમાંથી કાપી કાઢો. રહેલા ત્રીજા ભાગની લંબાઈ માપીને તે બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

૧૪. અઘના અટકળથી સરખા બે ભાગ કરો, અને તે બરાબર છે કે નહિ તે પ્રત્યક્ષ માપી જુઓ. (પુ૦)

૧૫. અઘના અટકળથી ત્રણ સરખા ભાગ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

૧૬. અઘના અટકળથી ચાર સરખા ભાગ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

* પુ૦=પુનરાવર્તન; એટલે એજ બાબતનું પુનરાવર્તન કરો. કોઈ પણ બાબત બરાબર આવડે ત્યાંસુધી તેનું પુનરાવર્તન કરવું પડે છે.

+ મિ. મી.=મિલિમીટર.

પર, ને બીજી વખત હું ને જ પર પડી રહેશે. એટલે અજ લીધી હું બિંદુમાં દુભગાઈ.

એજ રીતે આપેલી કોઈ પણ લીટીના, જે સંખ્યા એનો ધાત હોય તે સંખ્યા જેટલા સરખા ભાગ કરી શકાશે.

પ્રશ્નો.

૧. ૩.૨", ૪.૩", ૨.૯", ૩.૭" લંબાઈની લીટી દોરો, અને તેમના બે સરખા ભાગ કરો.

૨. ઉપલા પ્રશ્નમાંની લીટીઓના ૪ સરખા ભાગ કરો.

કાગળ વાળીને લીટી દુભાગવાની રીત.—અજ લીટી કાગળ પર દોરો. હવે એ કાગળને એવી રીતે વાળો કે આખી અજ લીટી સળ ઉપર બહારની બાજુએ બરાબર આવી રહે. હવે અ છોડો જ ઉપર આવે એવી રીતે કાગળ ફરીથી વાળો. બીજી વખત વાળતાં જ્યાં સળ પડશે ત્યાં લીટીના સરખા બે ભાગ થશે.

કાગળ ઉપર ૨", ૨.૫", ૩", ૩.૭", ૩.૩", ૪.૯"... લંબાઈની લીટીઓ લઈને તે ઉપલી રીતે દુભાગો, અને તે બરાબર દુભગાઈ છે કે કેમ તે વિભાજકની મદદથી તપાસી જુઓ.

રકેલ કે અંતરપ્રમાણ.

વર્ગમાંના કાળા પાટીઆની લંબાઈ માપો. તે કેટલા કુટ છે ? “ચાર કુટ.” એજ પાટીઆની આકૃતિ આ પાના પર દોરી છે તે જુઓ. આ આકૃતિમાંની પાટીઆની લંબાઈ માપો. તે કેટલા ઇંચ છે ? “આ લંબાઈ અર્ધો ઇંચ છે.” આ ઉપરથી પાટીઆની લંબાઈ અર્ધો ઇંચ છે એમ સમજવાનું કે ? આ આકૃતિમાંની અર્ધો ઇંચ લંબાઈ પરથી ખરી લંબાઈ કેટલી સમજવાની ? “ચાર કુટ.”

આ આકૃતિમાંની પાટીઆની પહોળાઈ માપો. તે કેટલી છે ? “ અર્ધો ઇંચ.” આ ઉપરથી પાટીઆની ખરી પહોળાઈ કેટલી છે, તે તમારા જાણવામાં આવે છે ? “ ચાર ફુટ.” આ કેમ સમજાયું ? “ પેલી આકૃતિમાંની અર્ધો ઇંચ લંબાઈ જો ૪ ફુટ દર્શાવે છે, તો અર્ધો ઇંચ પહોળાઈ પણ ૪ ફુટ દર્શાવે છે.”

પાસે ટેકરીનું ચિત્ર દોરેલું છે. આ ટેકરીની ઉંચાઈ કેટલી છે, તે ચિત્ર ઉપરથી તમે કહી શકશો કે ? તે કહેવાને વળી કઈ બાબત આપેલી હોવી જોઈએ ? “ ચિત્ર અને ટેકરી એ બેની ઉંચાઈનું પ્રમાણ.”



આકૃતિમાં બતાવેલું અંતર (લંબાઈ પહોળાઈ વગેરે) અને ખરું અંતર એ બેની વચ્ચેના પ્રમાણને અંતરપ્રમાણ (અંગ્રેજીમાં સ્કેલ) કહે છે. આ પ્રમાણ આપેલું ન હોય તો આકૃતિ જોનારને, તે આકૃતિ જે વસ્તુની છે તે વસ્તુનું ખરું પરિમાણ શું છે તે જાણાશે કે ? “ના.” ઠીક. જો પ્રમાણની જરૂર ન રાખતાં વસ્તુઓ હોય તેટલી મોટી દોરવા જઈએ તો શી અગવડ પડે ? “ ”

વસ્તુ જેટલા કદની હોય તેટલાજ કદની આકૃતિ કાગળ પર સાધારણ રીતે દોરી શકાતી નથી. દાખલા તરીકે, ઘણાજ નાના પદાર્થો જેટલા કદના દેખાય છે, તેટલીજ નાની તેમની આકૃતિ હાથે કાઢી શકાતી નથી; અને યંત્રોની મદદથી (ફોટો વગેરે લઈને) તે કાઢી શકાતી હોય, તોપણ તે નરી આંખો વડે જોનારને સ્પષ્ટ દેખાતી નથી; માટે તે અસલ પદાર્થ કરતાં મોટી દોરવી પડે છે. એથી ઉલટું, જે પદાર્થો મોટા હોય છે, તેમની આકૃતિ તેમના જેટલી મોટી દોરવા માટે ઘણાજ મોટા કાગળ લેવો પડશે; માટે તેમની આકૃતિ

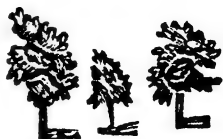
તેમનાથી નાની દોરવી પડે છે. આ કારણને લીધે વસ્તુની આકૃતિ દોર્યા પછી તે વસ્તુનું ખરેખર કદ કેટલું છે એ સમજવા માટે તે આકૃતિની લંબાઈ અને તે વસ્તુની ખરી લંબાઈ એ બેનું પ્રમાણ આપવું પડે છે. નકશાની નીચે સ્કેલ આપે છે તે એટલાજ માટે.

અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક—આકૃતિની લંબાઈ અંશની જગાએ, અને વસ્તુની ખરી લંબાઈ છેદની જગાએ લખવાથી જે અપૂર્ણાંક આવે છે, તેને અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક કહે છે. દાખલા તરીકે, આકૃતિમાં એક ઇંચ એક માઇલ દેખાડતો હોય ત્યારે $\frac{1}{૫૨૮૦ \times ૧૨} = \frac{1}{૬૩૩૬૦}$ આ અપૂર્ણાંકને અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક કહે છે; ૨ ઇંચ એક માઇલ દર્શાવતા હોય ત્યારે $\frac{૨}{૫૨૮૦ \times ૧૨} = \frac{1}{૩૧૬૮૦}$ આ અપૂર્ણાંકને અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક કહે છે; ૩ ઇંચ એક માઇલ દર્શાવતા હોય ત્યારે $\frac{૩}{૫૨૮૦ \times ૧૨}$ આ અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક થાય; ... વગેરે.

પ્રશ્નો.

૧. હિંદુસ્તાનના નકશા ઉપરથી નીચેનાં સ્થળોની વચ્ચેનું અંતર કાઢો:—કાશી અને કલકત્તા, કરાંગી અને કલકત્તા, મુંબઈ અને મદ્રાસ વગેરે.

૨. પાસે જે ઝાડોનાં ચિત્ર આપેલાં છે, તે જે પ્રમાણ ઉપર દોરેલાં છે, તે પ્રમાણ ૧": ૫' એટલે એક ઇંચ પાંચ ફુટ માટે* છે. તો તેમની ઉંચાઈ કેટલી તે કહો.



* ' આ નિશાની ફુટ માટે છે. દાખલા તરીકે ૫' = ૫ ફુટ.

૩. પાસે દેખાડેલા કુંગરની ઉંચાઈ કાઢો.
સ્કેલ $1''=1000'$.



૪. એક માઇલ માટે એક ઇંચ પ્રમાણ લઈને, જેમની વચ્ચે $2\frac{1}{2}$ માઇલ અંતર છે એવાં બિંદુ કાઢો.

૫. $1''=2$ માઇલ, એ સ્કેલ લઈને ૪ માઇલ લાંબો સીધો રસ્તો કાઢો.

૬. $1''=1$ માઇલ, આ સ્કેલ લઈને જેમની વચ્ચેનું અંતર ૨.૫ માઇલ હોય એવાં બે ગામની જગાઓ ટપકાંથી દર્શાવો.

૭. $2''=1$ ચાર્ડ, એ સ્કેલ લઈને ૪૫'' ઉંચી લાકડી ઉભી લીટીથી દર્શાવો.

સૂચના—નીચેના પ્રશ્નો છોડવા માટે કાટખુણો કાઢવાની રીતની જરૂર પડે છે. તે પાછલાં પાનાં બેઈને કહેવી, અથવા તે ભાગ ચલાવ્યા પછી નીચેના પ્રશ્ન છોડાવવા.

૮. ૫૦૦' લાંબા અને ૧૦૦' પહોળા ખેતરની આકૃતિ દોરો. (અંતરપ્રમાણ ૧ સેં.મી.* $=100'$).

૯. ૩૨૨' લાંબા અને ૧૮૨' પહોળા ખેતરની આકૃતિ દોરો. (અંતરપ્રમાણ ૧ સેં.મી. $=18'$).

૧૦. જેની લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે ૪૦૦' અને ૩૦૦' છે, અને જેની આસપાસની ભીંતની પહોળાઈ ૧૦' છે, એવા તળાવની આકૃતિ દોરો. (અંતરપ્રમાણ $1''=100'$).

૧૧. **બક** સીઠી અડ ભીંતે ટેકવીને ઉભી કરેલી છે.

* સેં.મી = સેન્ટિમીટર.

અ ભીંતનો પાયો છે. હવે અબ=૬' અને અક=૮' હોય તો સીઠીની લંબાઈ કેટલી ?+

૧૨. ઉપલા પ્રશ્નમાં અબ અંતર ૯' અને અક ૪૦' હોય તો સીઠીની લંબાઈ કેટલી ?

૧૩. જેની લંબાઈ ૩૦ ફુટ છે અને પહોળાઈ ૨૨ ફુટ છે, એવી ઓરડીની ભોંયતળીઆની આકૃતિ કાઢો અને તેના સામસામા જે ખુણાની વચ્ચેનું અંતર માપો.

[સૂચના—પૂર્વ અને દક્ષિણ, દક્ષિણ અને પશ્ચિમ, પશ્ચિમ અને ઉત્તર, અને ઉત્તર તથા પૂર્વ આ પાસપાસેની બળ્ખે દિશાની વચ્ચે કાટખુણો હોય છે, એ વિદ્યાર્થીઓને કહીને પછી નીચેના પ્રશ્નો છોડવા કહેવું.]

૧૪. એક માણસ બરાબર પૂર્વમાં ૮.૨ માઇલ ગયો, અને ત્યાંથી બરાબર ઉત્તર તરફ ૫.૩ માઇલ ગયો; તો તે જ્યાંથી નીકળ્યો ત્યાંથી કેટલા માઇલ સીધો આધો ગયો તે કહો.

૧૫. એક માણસ અ આગળથી નીકળીને બરાબર પૂર્વ તરફ ૩ માઇલ જાય છે, પછી બરાબર ઉત્તર તરફ ૪ માઇલ જાય છે, અને ત્યાંથી બરાબર પૂર્વમાં ૩ માઇલ જઈને વ સ્થળે પહોંચે છે; તો અ બ વચ્ચે અંતર કેટલું ?

૧૬. બ, અની પૂર્વમાં ૯ માઇલ છે. ક, બની ઉત્તરમાં ૧૨ માઇલ છે. ડ, કની પશ્ચિમમાં ૧૫ માઇલ છે; તો અથી બ કેટલો આધો છે ?

૧૭. અની પૂર્વમાં ૬ માઇલ છે. બની દક્ષિણમાં ૨ માઇલ છે. કની ઈશાનમાં ૩ માઇલ છે. ડની વાયવ્યમાં ૪ માઇલ છે; તો અથી ઈ કેટલા માઇલ આધો છે ?

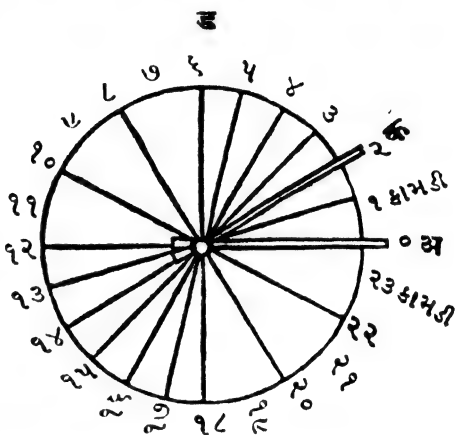
+ આ અને હવે પછીના આના જેવા પ્રશ્નોમાં પ્રત્યક્ષ લીટી માપીને સ્કેલની મદદથી જવાબ કહેવાનો હોય છે. અંતરપ્રમાણ સગવડ પ્રમાણે ગમે તે લેવું.

૧૮. અથી થ પૂર્વમાં છે, અને તે બે વચ્ચે ૪૦૦ ફુટનું અંતર છે. ક સ્થળ અની બરાબર ઇશાનમાં અને બની બરાબર વાયવ્યમાં છે; તો કનું અથી અંતર કેટલું ?

ਪ੍ਰਤਿ।

પાસે દોરેલી આકૃતિ જેવી આકૃતિ પાટીઆ પર અથવા
મોટા કાગળ પર દોરો, અને તે કાગળ ટાંકણીઓથી પાટીઆ
પર ચોઢો. વાંસની બે સાંકડી કામડીઓ લઈને તેમના એક
છેડામાં કાણાં

પાડો, અને કા-
ણાંમાં તાર કે
ટાંકણી ધાલીને
તેનાછેડા વાળો,
અને મજગરા
જેવું બનાવો. ગ
પછી આ બે
કામડીઓથી
બંનેલો કંપાસ



લઈને તેની નીચેની કામડી આકૃતિમાં દેખાડ્યા પ્રમાણે પાટીઆ પર આડી સજ્જડ બેસાડો. પછી ઉપલી કામડીનો જમણા હાથ તરફનો એટલે છુટો છેડો ઘડિઆળના કાંટાથી ઉલટી દિશામાં જરા ખસેડો, એટલે મજગરા પાસે (જ્યાં પેલી કામડીના છેડા તારથી બેંદી દીધા છે ત્યાં) ખુણો થશે. તે છોકરાઓને દેખાડો, અને “આ બે કામડીઓ એક બીજીને મળે છે ત્યાં આગળ જે ખુણો બન્યો છે તેને કોણ કે ખુણો કહે છે,” એમ કહો. કોણ એટલે ખુણો. બધા ખુણા બે લીટી* કે બે બાજુઓ

* આ પુસ્તકમાં લીટી એ શબ્દનો અર્થ ધણેખરે ઠેકાણે સીધી લીટી એવો કરવાનો છે.

મળવાથીજ બને છે. (પાસેના પદાર્થો બતાવીને તેમના ખુણા બતાવવા છોકરાઓને કહો. દાખલા તરીકે, મેજના ખુણા, ભીતી એક બીજીને જ્યાં મળે છે તે ખુણા.....વગેરે.) ઉપર કહેલી કામડીઓના છુટા છેડા વચ્ચેનું અંતર વધારો (ઉપલી કામડીનો છુટો છેડો ગોળ કુંડાળામાં ફેરવો), અને પહેલાંનાથી બમણો ખુણો બનાવો. પહેલાં કરતાં હવે ખુણો મોટો થયો છે કે ? પહેલાં કામડીનો છેડો વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો હતો ? હવે કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો છે ? પહેલાંના ખુણા કરતાં આ ખુણો કેટલાગણો મોટો છે ? “ બમણો. ” કામડીનો છેડો જરા જરા આગળ ખસેડીને ખુણો મોટો બનાવતા જાઓ, અને આ ખુણો કાટખુણા કરતાં ઓછો હોય તેજ વખતે તેનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો x તે ખુણા કરતાં નાનો છે કે મોટો છે એમ પૂછો. “ મોટો છે ” એમ છોકરા કહેશે. પછી કામડીથી બનેલો ખુણો વધારો, અને આ ખુણો જેમ જેમ વધતો જાય છે તેમ તેમ ન્યૂનતાપૂરક ખુણામાં શો ફેરફાર થતો જાય છે તે પૂછો. તે ખુણો નાનો નાનો થતો જાય છે એમ છોકરા કહેશે. પહેલો ખુણો કાટખુણા બરાબર થયો, એટલે તે ખુણો અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણો એ પેઢી મોટો કયો એમ પૂછો. બંને સરખા છે એમ કહે, તો “ એટલા મોટા ખુણાને કાટખુણો કહે છે ” એમ કહો. કાટખુણાના બીજા દાખલા છોકરાઓને બતાવો, અને પછી તેવા બીજા દાખલા તેમની પાસે કઢાવો. કામડીનો છેડો આગળ ખસેડો, અને થએલો ખુણો કાટખુણાથી મોટો છે, અને તેનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કાટખુણા કરતાં નાનો છે, એ કઢાવો. એ પ્રમાણે છેડો આગળ ખસેડતાં ખસેડતાં, પહેલો

* ન્યૂનતાપૂરક ખુણો એ શબ્દનો ઉપયોગ આ વખતે છોકરાઓ સાથે બોલવામાં કરવો નહિ, પણ તે ખુણો હાથે દેખાડવો. ઉપલો શબ્દ કેવળ શિક્ષકો માટે યોગ્ય છે.

ખુણે અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણે એ બે વચ્ચે પડતો તફાવત છોકરા પાસેથીજ કઢાવો. કામડીનો છેડો **ઙ** અક્ષર પાસે જાય એટલે થએલો ખુણો કાટખુણાથી કેટલો મોટો છે એમ પૂછો. કામડીનો છેડો **હ** સ્થળે આવતા સુધીમાં જો એક કાટખુણો થાય છે, તો છેડો તેટલોજ આગળ ગયાથી કેટલા કાટખુણા જેવડો ખુણો થશે ?

એક કાટખુણો કરવા માટે વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને બીજી કામડીના છેડાને ફરવું પડે છે ? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી અર્ધો કાટખુણો થશે ? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી દોઢ કાટખુણો થશે ? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી બે કાટખુણા થશે ? ... વગેરે.

સૂચના—હવે પછીનો ભાગ શીખવતા પહેલાં વર્તુળ, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, પરિધ, ત્રિજ્યા, કૌંસ, જ્યાં વગેરે સંજ્ઞાઓની માહિતી છોકરાઓને આપવી. આ પારિભાષિક શબ્દોની વ્યાખ્યાઓ આગળથી મોઢે કરાવી લેવાની જરૂર નથી. છોકરાઓ તેમનો અર્થ સમજે, અને તે તે આકૃતિઓને તેમનાં ખરાં નામ વડે બતાવી શકે, એટલે બસ છે.

વ્યાખ્યા.

જે આકૃતિની હદ એકજ અખંડ વક્ર લીટીથી દર્શાવાય છે, અને જેમાં એક એવું બિંદુ હોય છે કે તેમાંથી તે વક્ર લીટી સુધી ગમે તેટલી સીધી લીટીઓ દોરી હોય તોપણ તે બધી સરખી થાય છે, તે આકૃતિને **વર્તુળ** કહે છે.

વર્તુળની હદ દેખાડનાર વક્ર લીટીને તેનો **પરિધ** કહે છે. પરિધના કોઈ પણ ભાગને **કૌંસ** કહે છે.

વર્તુળના જે બિંદુમાંથી પરિધ સુધી દોરેલી સીધી લીટીઓ બધી સરખી હોય છે તેને વર્તુળનું **મધ્યબિંદુ** કહે છે.

મધ્યબિંદુથી પરિધ સુધી દોરેલી કોઈ પણ સીધી લીટીને **ત્રિજ્યા** કહે છે.

ખુણાઓનું નાનામોટાપણું.

ઉપલા પ્રયોગમાંની કામડીથી અર્ધો કાટખુણો કરો. પછી બંને કામડીઓને છેડે બીજી કામડીઓ બાંધીને ખુણાની બાજુઓ લાંબી કરો. આ ખુણો પહેલાંના ખુણા કરતાં મોટો છે કે? પહેલાંના ખુણો કેવડો છે? વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને પહેલાં બીજી કામડીનો છેડો ફર્યો હતો? હવે કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો છે? “એક અષ્ટમાંશ.” આ ઉપરથી આ ખુણો પહેલાંના ખુણા જેવડોજ છે એમ સમજાય છે.

આ ખુણો મોટો કરવો હોય તો શું કરવું જોઈએ? “છેડો આગળ ખસેડવો જોઈએ.” ખુણાની બાજુ વધારે લાંબી કરવાથી ખુણો મોટો થશે કે? “ના.”

આ (પાસેની આકૃતિમાં બતાવેલી) કામડીઓ અર્ધો કાટખુણો કરે છે. તેમનો જમણી બાજુનો અર્ધો ભાગ કાપી નાખ્યો હોય, તો ખુણામાં કંઈ તફાવત પડશે કે? “ના.” આ ખુણો નાનો કરવો હોય તો શું કરવું જોઈએ? ખુણો નાનો કરી જુઓ અને પછી સવાલનો જવાબ આપો. “ફરતી કામડીનો છેડો પાછળ ખસેડવો જોઈએ.”

પરિમાણમાં સરખા છતાં પણ જેમની બાજુઓ નાની મોટી છે એવા બે ખુણા પાટીઆ પર દોરો, અને તે પૈકી કયો ખુણો મોટો છે તે છોકરાઓને પૂછો; એટલે લાંબી બાજુઓવાળો ખુણો મોટો છે એમ છોકરા કહેશે. પછી ખુણાની એક બાજુ પર વિભાજકની એક બાજુ (તેમનાં શિરોબિંદુઓ એક બીજા પર આવે એવી રીતે) મૂકીને તે ખુણા જેટલો ખુણો થતા સુધી વિભાજકની બીજી બાજુ ખસેડો. પછી આ વિભાજક બીજા ખુણા પર તેવીજ રીતે મૂકીને બંને ખુણા સરખા છે એમ બતાવો, અથવા આ વિ-

ભાજક, ઉપર કહેલા (૨૪ મા પાના પરના) ચક્ર ઉપર મૂકીને તેથી વર્તુળનો કેટલામો ભાગ દર્શાવાય છે તે જોવાને છોકરાઓને કહો. પછી વિભાજક બીજા ખુણા પર મૂકીને પહેલાંની માફકજ કૃતિ કરો. બે ખુણામાં કંઈ તફાવત છે કે ? “ના.”

એકથી બીજો જરા મોટો હોય એવા બે ખુણા લો. તે પૈકી નાના ખુણાની બાજુઓ મોટા ખુણાની બાજુઓ કરતાં લાંબી લો. આ બેમાં મોટો ખુણો કયો ? જેની બાજુ લાંબી છે તે ખુણો મોટો એમ કદાચ છોકરા કહે, તો પછી ઉપર પ્રમાણે કૃતિ કરીને ખરેખરો મોટો ખુણો કયો તે છોકરાઓની પાસે કઢાવો.

આ ઉપરથી ખુણાઓનું નાનામોટાપણું શા પર આધાર રાખે છે, તે સમજાય છે ? તે બાજુઓની લંબાઈ પર આધાર રાખે છે કે ? “ના.”

અવક ખુણો બનાવવા માટે **બ**ક નો **બ** છેડો વર્તુળના $\frac{1}{4}$ ભાગમાં થઈ જતા સુધી ફેરવવો પડ્યો, તો તેવડોજ બીજો **ડર્ફ** ખુણો કરવા માટે **ઈ**ફ નો **ફ** છેડો વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને જતા સુધી ફેરવવો પડશે ? આ ઉપરથી બે ખુણા સરખા છે એમ ક્યારે કહેવાય, એ વિષે કોઈ નિયમ કહી શકાય છે કે ?

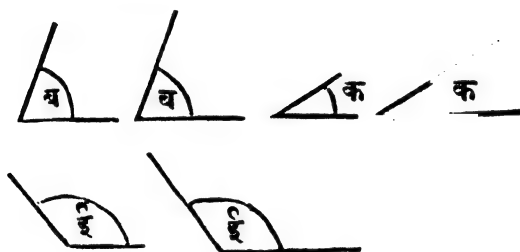
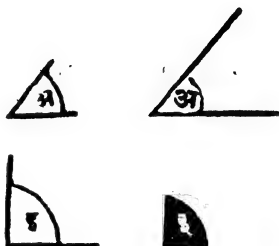
“જ્યારે બે ખુણાની બાજુઓ વર્તુળના સરખા ભાગમાં થઈને ફરેલી હોય છે, ત્યારે તે ખુણા સરખા છે એમ કહેવાય છે.”

ખુણાઓનું સરખાપણું અથવા નાનામોટાપણું નક્કી કરવાની રીત:—

એક ખુણો ઉપાડીને બીજા પર મૂક્યો હોય, ત્યારે જો તે બીજા પર બરાબર આવી રહે, એટલે જો તે બંનેનાં શિરો-

બિંદુઓ અને બાંજુઓ એક એક પર બરાબર પડે, તો તે સરખા છે એમ જાણવું.

ખુણાનું નાનામોટાપણું, જે લીટીઓ, કામડીઓ, કે બાંજુઓ મળવાથી તે ખુણો બને છે, તેમની લંબાઈ પર આધાર ન રાખતાં તેમના ઓછાવત્તા પરિવર્તન પર (કુંડાળામાં ફરવા પર) આધાર રાખે છે. ખુણાની બાંજુઓની વચ્ચે જે લગ્યા હોય છે, તેના નાનામોટાપણાની સાથે ખુણાના સરખાપણાનો કે નાનામોટાપણાનો ખીલકુલ સંબંધ



નથી, એ ધ્યાનમાં રાખવું. દાખલા તરીકે, આપેલી આકૃતિઓમાં સમાન અક્ષરે બતાવેલા ખુણા સરખા છે એમ જાણવું.

કાટખુણો.

એક કાગળનો ચોરસ લઈને તેને બરાબર મધ્ય ભાગ ઉપર આડો વાળો. પડેલી ઘડીની ધારના બે ભાગો એક બીજા પર બરાબર આવે એવી રીતે ફરીથી કાગળને મધ્ય ભાગ પર વાળો. એવી રીતે વાળવાથી જે ખુણો થાય છે, તે પહેલાં દેખાડેલા કાટખુણાની બરાબર હોય છે, એ છોકરાઓને બતાવો. પછી એક ઘડી ઉઘાડીને બે કાટખુણા દેખાડો; અને

પછી ખીજ ઘડી ઉઘાડીને કાગળની વચ્ચેવચ બનેલા ચાર કાટખુણા દેખાડો. નિશાળમાંની વસ્તુઓના ખુણા બતાવીને તેમાંના કયા ખુણા કાટખુણાની બરાબર છે, અને કયા કાટખુણાથી નાના કે મોટા છે, એ પૂછો.

કાગળનો વર્તુળાકાર કકડો લઈને ઉપલો પ્રયોગ કરો, અને આ તથા પહેલાંના પ્રયોગ પરથી કાટખુણાની વ્યાખ્યા નીચે આપ્યા પ્રમાણે છોકરાઓને મોઢેથી કઢાવો.

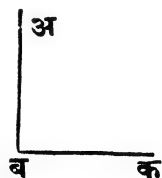
કાટખુણાની વ્યાખ્યા—એક લીટી પર ખીજ લીટી પડી હોય ત્યારે તે (ખીજ) લીટીની બંને બાજુના ખુણા સરખા થાય, તો તેમાંથી દરેક ખુણાને કાટખુણો કહે છે.

અથવા, ખુણાની બાજુઓના છેડાઓની વચ્ચે વર્તુળના એક ચતુર્થાંશની બરાબર અંતર હોય છે (ખુણાની બાજુઓના બે છેડા મળીને વર્તુળના એક ચતુર્થાંશ ભાગમાં થઈને ફરે છે) ત્યારે કાટખુણો થાય છે.

ઉપર કાટખુણાનો જે ખ્યાલ આપ્યો છે, તે પરથી બધા કાટખુણા સરખા હોય છે એ જણાઈ આવશે.

ચાર પાંચ કાટખુણા લો. તેમનાં શિરોબિંદુઓ અને બાજુઓ એક એક પર બરાબર પડે, એવી રીતે તેમને એક બીજા પર મૂકો; એટલે સઘળા કાટખુણા સરખા હોય છે એ જણાઈ આવશે.

એક લીટી ખીજની સાથે કાટખુણો કરતી હોય, તો તે બેમાંની દરેક, ખીજ પર લંબ છે એમ કહેવાય છે. દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિમાં અબ, બક પર લંબ છે, અને બક, અબ પર લંબ છે.



કાગળ વાળીને આપેલી લીટી પર લંબ કાઢવાની રીત:—

પ્રયોગ—કાગળનો ગમે તેટલા કદનો કકડો લો. તેની

ગમે તેમ ઘડી વાળો. આ ઘડીની ધારના ભાગ એક ખીજ પર બરાબર પડે એવી રીતે ફરીથી કાગળ વાળો. કાગળ ઉઘાડી જુઓ. પહેલી ઘડીની સાથે ખીજ ઘડી કેટલો મોટો ખુણો કરે છે ? “કાટખુણો.” આ પરથી કાગળ વાળીને કોઈ લીટી પર લંબ કાઢવા માટે તમે કઈ રીત શીખ્યા ? “.....”

આપેલી લીટીની બહારના બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર લંબ કાઢવા માટે ઉપલી રીતનો ઉપયોગ તમે શી રીતે કરશો ? “ આપેલા બિંદુમાંથી કાગળ એવી રીતે વાળવો કે વાળવાથી પડતા આપેલી લીટીના ભાગ એક ખીજ પર પડી રહે.”

ખીજ રીત:—અબ આપેલી લીટી છે. ક આપેલું બિંદુ છે. અબ ઉપર કાગળ વાળો. એમ વાળતાં ક બિંદુ અબની ખીજ બાજુના કાગળના ભાગને જ્યાં સ્પર્શ કરે ત્યાં પેન્સિલથી, કે કમાં વિભાજકની અણી ખોસીને, ડ બિંદુ કરો; અને કહ સાંધો.

પ્રશ્ન.

૧. કાગળના કકડા પર એક બિંદુ લો, અને કાગળ વાળીને તે બિંદુ આગળ કાટખુણો બનાવો. એવા કાટખુણા બધા મળીને કેટલા થાય છે ? “ ચાર. ”

સૂચના—ઘડિઆળ સંબંધી નીચેના બધા પ્રશ્નોમાં ઘડિઆળના બંને કાંટા સ્વતંત્ર છે, એટલે એક કાંટો ફેરવ્યો હોય તોપણ બીજો ફરતો નથી, એમ ધારવું.

૨. ઘડિઆળના બંને કાંટા ત્રણ પર છે; તેમાંથી એક કાંટો ઉલટો ફેરવીને ૧૨ પર આણ્યો હોય, તો તે કાંટા વચ્ચે જે ખુણો થશે, તે કાટખુણાથી નાનો થશે કે મોટો ?

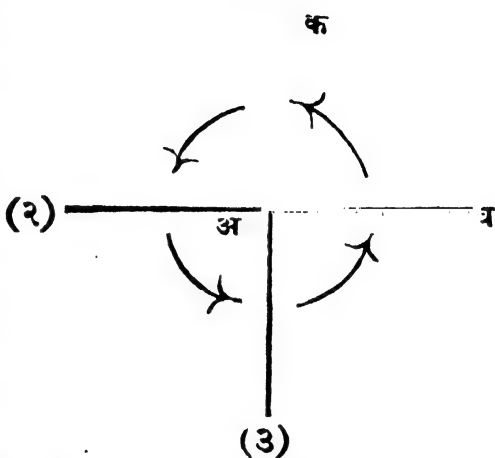
૩. એક કાંટો ૯ પર અને બીજો બરાબર ૩ પર છે, તો તે બે કાંટા વચ્ચેનો ખુણો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે ?

બિંદુની આસપાસ થતા ખુણાઓનો સરવાળો.

પાસેની આકૃતિમાં અક સળીનો છેડો (૧)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં આવે ત્યારે બે અબ, અક વચ્ચે એક કાટખુણો થાય, અને અકનો છેડો (૨)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં આવે ત્યારે બે અબ,

(૧)

અક વચ્ચે બે કાટખુણા થાય, તો અક (૩)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં જાય ત્યારે અબ, અક વચ્ચે બે ખુણો થાય, તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય ?



અક સળી

(૩)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાંથી નીકળીને બાણની દિશામાં જઈ આખરે અબ પર પડે, તો અક સળી બે ખુણામાં થઈને ફરી, તે ખુણો કેટલા કાટખુણા બરાબર થયો ?

પહેલાં કહ્યા પ્રમાણે કાગળ વાળીને કાટખુણો તૈયાર કરો. બે બિંદુમાં બંને સળી એક બીજાને છેદે છે, તે બિંદુની પાસે કેટલા કાટખુણા થાય છે ?

ઉપલા બે પ્રયોગ ઉપરથી, એક લીટી પોતાના એક છેડાના બિંદુની આસપાસ ફરતી ફરતી એક પ્રદક્ષિણા કરીને અસલની જગાએ આવે છે, એટલે તે કેટલા કાટખુણામાં થઈને ફરી આવે છે ? “તે ચાર કાટખુણામાં થઈને ફરી આવે છે.”

એક બિંદુમાંથી જુદી જુદી દિશાઓમાં લીટીઓ દોરી

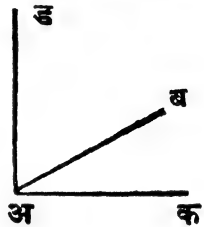
હોય, તો તેમની વચ્ચે જે ખુણા થાય છે તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે ઉપલા પ્રયોગ પરથી તમે શું શીખ્યા?

વ્યાખ્યા.

કાટખુણાથી નાના ખુણાને સાંકડા ખુણો કહે છે.

કાટખુણાથી મોટા ખુણાને પહોળા ખુણો કહે છે.

જે બે ખુણા મળીને એક કાટખુણો બને છે તેમને એક બીજના કોટિખુણો કહે છે. આપેલી આકૃતિમાં ડઅબ અને બઅક એક બીજના કોટિખુણો છે.



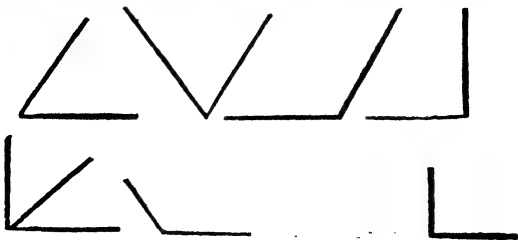
જે બે ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર થાય છે, તેમને એક બીજના ન્યૂનતાપૂરક

ખુણો કહે છે. આપેલી ક આકૃતિમાં કઅબ અને બઅડ એક બીજના ન્યૂનતાપૂરક ખુણો છે.



ખુણાના પ્રકાર.

નીચેના ખુણામાંથી સાંકડા ખુણા કયા, પહોળા ખુણા કયા, અને કાટખુણા કયા તે કહો.



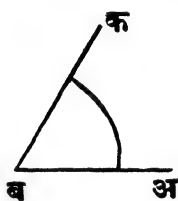
નીચે કેટલીક ખુણાઓની જોડો આપી છે, તેમાંથી કોટિ-ખુણા કયા અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણા કયા તે કહો.



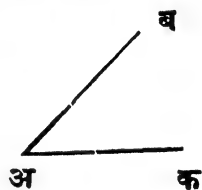
ખુણાઓના સંબંધમાં પરિભાષા.

જે જે લીટીઓ મળીને ખુણો થાય છે, તેમને તે ખુણાના ભુજા કે બાજુ કહે છે. પાસેની આકૃતિમાં **બક**, **બઅ** તે ખુણાના ભુજા છે.

ખુણાના ભુજા એક બીજાને જે બિંદુમાં મળે છે, તે બિંદુને તે ખુણાનું શિરોબિંદુ કહે છે. પાસેની આકૃતિમાં **બ** શિરોબિંદુ છે.



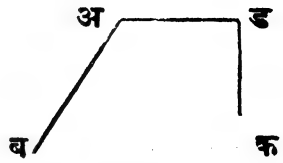
ખુણાનું નામ કહેતી વખતે શિરોબિંદુની પાસેનો અક્ષર વચ્ચે, અને તેની બે બાજુએ ખુણાની બે બાજુના છેડાની પાસેના અક્ષર મૂકવાનો રિવાજ છે. દાખલા તરીકે, પાસે આપેલા ખુણાને **બઅક** કે **કઅબ** ખુણો કહે છે.



કોઈ પણ આકૃતિનું નામ આપવાની સામાન્ય રીત એવી છે, કે તેના કોઈ પણ એક ખુણાથી કે છેડાથી શરૂ કરીને તેની આસપાસ ડાબી બાજુએ યાદને પ્રદક્ષિણા કરતાં, પ્રદક્ષિણા પુરી થતા સુધી તેના ખુણા જે ક્રમે આવે તે ક્રમે તેના ખુણા પાસેના અક્ષરો ઉચ્ચારવા. તેથી બધી બાજુએ ઘેરાએલી આકૃતિઓનાં નામ ઘણી રીતે આપી શકાય છે.

દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિ **અબકડ**, **બકડઅ**,

કડઅવ, ડઅવક આ ચાર નામથી દર્શાવી શકાય છે. પણ ખુણાને ત્રીજી બાજુએ હદ હોતી નથી, તેથી તેની બાજુના છેડાનાં નામ દઈને તે બેજ રીતે દર્શાવી શકાય છે.

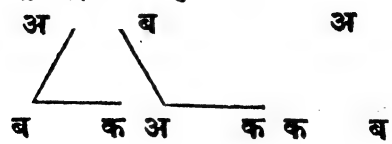
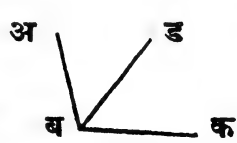


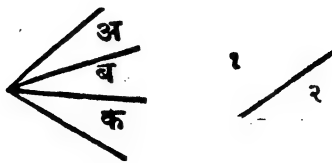
આકૃતિની આસપાસ જમણી બાજુએથી પ્રદક્ષિણા કરીને પણ કોઈ કોઈ વખત આકૃતિ દર્શાવાય છે. દાખલા તરીકે, ઉપલી આકૃતિ અડકવ, ડકવઅ, કવઅડ, વઅડક આ ચાર નામમાંથી ગમે તે નામથી દર્શાવી શકાય.

કોઈ કોઈ વખત ખુણામાં લખેલા ગમે તે કોઈ એક અક્ષર વડે ખુણો દર્શાવવામાં આવે છે. દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિમાં અ ખુણો એટલે ચરલ ખુણો, અને વ ર ખુણો એટલે લરવ ખુણો.

ખુણો એ શબ્દને બદલે \angle આ ચિહ્ન કરવાનો રિવાજ છે; જેમકે \angle અવક એટલે અવક ખુણો; \angle અ એટલે અ ખુણો; \angle અ એટલે અ ખુણો.....વગેરે.

પાસેની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બ્યારે બે ખુણા એક બીજાને અડકેલા હોય છે, ત્યારે તેમને પાસપાસેના કે પાસેના ખુણા કહે છે. આ આકૃતિમાં અવક અને ડવક એ પાસપાસેના ખુણા છે. અવક ખુણાને અવક અને ડવક નો સરવાળો કહે છે.





ઉપલી આકૃતિઓમાં ખુણા આપ્યા છે, તેમને અક્ષરોથી દર્શાવો. તેમાં કયો ખુણો કયા ખુણાને અડકેલો છે તે કહો.

ખુણાઓની સરખામણી.

બે ખુણામાંથી કયો ખુણો મોટો છે તે જોવાની રીત:—

એક ખુણાનો છાપો * ટિશુપેપરથી, ટ્રેસિંગપેપરથી, કે તેલીઆ કાગળથી લેવો; અથવા તે ખુણા જેવડો ખુણો દોરીને+ તે કાપી કાઢવો. પછી તે ખુણો બીજા ખુણા પર

* છાપો કે છાપ—આકૃતિ પર ટિશુપેપર રાખીને દરેકી નકલને છાપો કે છાપ દહે છે.

+ આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો દોરવાની રીત:—જો અબક ખુણાની પ્રતિમા લેવી હોય, તો તે ખુણા નીચે બીજા કાગળ રાખવો; અને ખુણાના અ, વ, ક, બિંદુઓમાં ટાંકણી ખોસવી. નીચેના કાગળમાં જે કાણું પડે તેમને અનુક્રમે અ, વ, ક, નામ આપીને અ, વ, વ, ક સાંધવાં. અ, વ, વ, ક ખુણો અબક ખુણા બરાબર છે એમ જણાઈ આવશે.

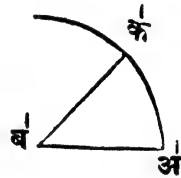
કોણમાપકની મદદ વગર આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો કાઢવાની બીજી રીત:—આપેલો ખુણો અબક, વક લીટીના પરિવર્તનથી બનેલો છે. વ મધ્યબિંદુ ધારીને વઅ ત્રિજ્યાએ વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળના ફક્ત એક ભાગમાં યદને વક ફરી છે; માટે અબક જેટલો ખુણો કાઢવો હોય તો સરખા



મૂકીને ક્યો ખુણો મોટો છે તે જોવું. એક ખુણાને બીજા પર મૂકતી વખતે શિરોબિંદુ શિરોબિંદુ પર અને એક ખુણાનો એક ભુજ બીજા ખુણાના એક ભુજ પર રાખવો. પછી ઉપલા ખુણાનો બીજો ભુજ નીચેના ખુણાની અંદર કે બહાર પડે તે પ્રમાણે ઉપલો ખુણો નાનો કે મોટો તે નક્કી કરવું.

પાસે કેટલીક ખુણાની જોડો આપેલી છે, તેમાંથી દરેક

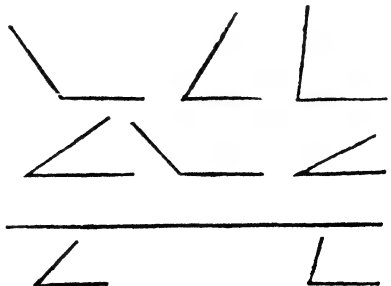
વર્તુળના તેટલા ભાગમાં યઈને ખુણાનો ભુજ ફેરવ્યો એટલે બસ. તેટલા માટે બંન્ને જોડા બીજા બંન્ને લીટી દોરો. બ' મધ્યબિંદુ



ધારીને બ'નું ત્રિજ્યાએ બીજું વર્તુળ દોરો. અક કૌંસનું અંતર વિભાજકથી માપો, અને તે વિભાજક વડે તેટલોજ મોટો ભાગ બીજા વર્તુળમાંથી કાપી કાઢો. ધારો કે એ ભાગ 'અક' છે. 'બક' સાંધો. 'અબક' ખુણો આપેલા ખુણાની બરાબર હોવો જોઈએ એ ખુલ્લું છે.

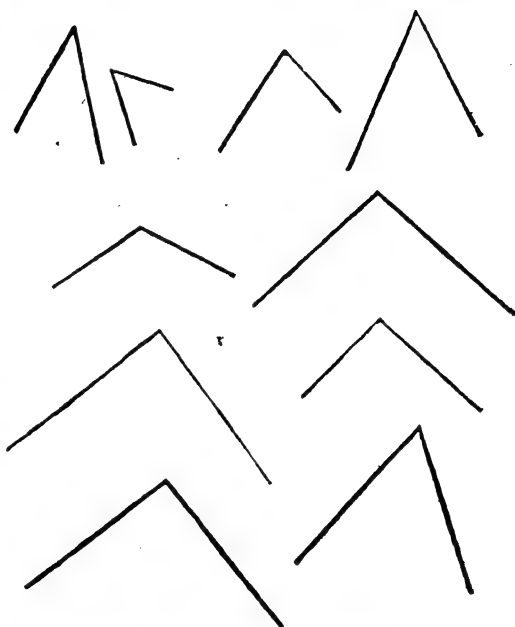
નીચે આપેલા ખુણા જેવડા ખુણા દોરો.

પાસે આપેલી લીટી જેવડી લીટી દોરીને તેના બે છેડા આગળ, આપેલા બે ખુણા જેવડા ખુણા કરો.



જોડમાંનો કયો ખુણો મોટો અને કયો નાનો તે નક્કી કરો.

(પહેલાં, આ-
પેલા ખુણા-
માંથી કયો
મોટો છે તે
અટકળથી ન-
ક્કી દેરો, અને
પછી ઉપર
આપેલી રીતે
સરખામણી
કરીને તમારો
જવાબ ખરો
છે કે નહિ
તે જુઓ.)



નાની મોટી બાજુવાળા ચારપાંચ કાટખુણા હાથે દોરો;
તેમજ સાંકડા ખુણા અને પહોળા ખુણા દોરો.

ખુણાના વિભાગ અને ખુણા માપવાની રીત.

જેનો એક ખુણો કાટખુણો હોય એવો કાગળનો કકડો
લઈને કાટખુણાનો એક ભુજ બીજ પર પડે એવી રીતે
તેને વાળો. કાટખુણાના કેટલા ભાગ પડ્યા? “બે.” બે
ભાગ સરખા છે કે નાના મોટા? “સરખા.” એમાંથી
દરેક ખુણો કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ છે? “અર્ધો.” આ
ખુણાને ફરીથી વાળીને તેના બે સરખા ભાગ કરો. દરેક
ખુણો કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ છે? “એક ચતુર્થાંશ.”

જેમ કુટના બાર સરખા ભાગ કરીને દરેક ભાગને ઇંચ

એ નામ આપ્યું છે, તેમ એક કાટખુણાના ૯૦ સરખા ભાગ કદપીને દરેક ભાગને અંશ એવું નામ આપેલું છે. (કોણમાપક પરના કાટખુણાના ભાગ દેખાડવા.)

ખુણાનું નાનામોટાપણું ખુણાની બાજુઓની વચ્ચેના વર્તુળભાગના નાનામોટાપણા પર આધાર રાખે છે. એટલા માટે વર્તુળના પરિઘના ૩૬૦ અંશ કે સરખા ભાગ કરીને આ દરેક ભાગ ઉપરથી બીજા બધા ખુણા માપવાનો રિવાજ છે. ખુણા માપવાનું અંશથી મોટું માપ કાટખુણો છે. [પૃથ્વી સૂર્યની આસપાસ પ્રદક્ષિણા કરતી વખતે રોજ વર્તુળના ૩૬૦મા ભાગમાં થઈને જાય છે; આ ઉપરથી વર્તુળનો ૩૬૦મો ભાગ ખુણો માપવા માટે લેવાનો રિવાજ પડી ગયો હોય એમ લાગે છે.]

[અંશ એ શબ્દને ઠેકાણે ° આ ચિહ્ન વાપરે છે; જેમકે:—
૧૦° એટલે દસ અંશ; ૨૨° એટલે ૨૨ અંશ.]

પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણામાં ૯૦ અંશ હોય છે; તો અર્ધા કાટખુણામાં કેટલા? પા કાટખુણામાં કેટલા? $\frac{1}{3}$ કાટખુણામાં કેટલા?

૨. ઘડિઆળમાં બરાબર એક વાગે છે ત્યારે બે કાંટા વચ્ચે જે ખુણો હોય છે, તે કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ હોય છે? તે ખુણામાં અંશ કેટલા?

૩. ઘડિઆળમાં બરાબર બે વાગે છે ત્યારે બે કાંટા વચ્ચે જે ખુણો થાય છે, તે કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ? તે ખુણામાં અંશ કેટલા?

૪. ઘડિઆળમાં ૫, ૬, ૭, ૮, ૯.....વગેરે વાગે છે ત્યારે બે કાંટા વચ્ચેનો ખુણો કેટલા અંશનો હોય છે?

૫. નીચેની દિશાઓની વચ્ચે કેટલા અંશના ખુણા થાય છે તે કહો:—પૂર્વ અને પશ્ચિમ, પૂર્વ અને દક્ષિણ, દક્ષિણ અને નૈર્ઋત્ય, પશ્ચિમ અને ઈશાન, વાયવ્ય અને અગ્નિ, ઉત્તર અને ઈશાન—પૂર્વ,* વાયવ્ય—ઉત્તર અને પૂર્વ.....વગેરે.

ખુણા માપવાની રીત.

કોણમાપકના ઉપયોગના સંબંધમાં સૂચના—જે ખુણો માપવો હોય તેના શિરોબિંદુ પર કોણમાપકનું મધ્ય-બિંદુ (એટલે સીધી ધારના મધ્યભાગ પરની ખાંચ) રાખીને ખુણાની એક બાજુ પર કોણમાપકની એક બાજુ મૂકવી; અને ખુણાની બીજી બાજુ કોણમાપકના જે અંશની નિશાની નીચે થઈ જતી હોય, તેટલા અંશનો તે ખુણો છે એમ સમજવું.

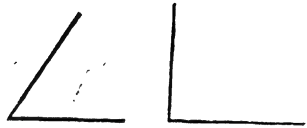
ખુણાની ડાબી બાજુ પર કોણમાપકની ડાબી બાજુ મૂકી હોય, તો ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ તરફ વધતા જતા કોણમાપક પરના આંકડા ઉપરથી ખુણાના અંશ જાણવા; અને ખુણાની જમણી બાજુ પર કોણમાપકની જમણી બાજુ મૂકી હોય, તો જમણી બાજુથી ડાબી બાજુ તરફ વધતા જતા કોણમાપક પરના આંકડા ઉપરથી ખુણાના અંશ સમજવા. તેમ છતાં પણ કયા આંકડાનો ઉપયોગ કરવો એ વિષે ગુંચવણ ન પડે એટલા માટે, ખુણાની જમણી બાજુ પર કોણમાપકની જમણી બાજુ મૂકવાની હંમેશા ટેવ રાખવી એ સારું છે.

ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો છે, તે પહેલાં ચટકળથી જોવું; એટલે ખુણો માપતાં કોણમાપક પરના આંકડા ખોટી બાજુએથી જાણવામાં આવ્યા હોય, તો થએલી ભૂલ જાણાઈ આવશે.

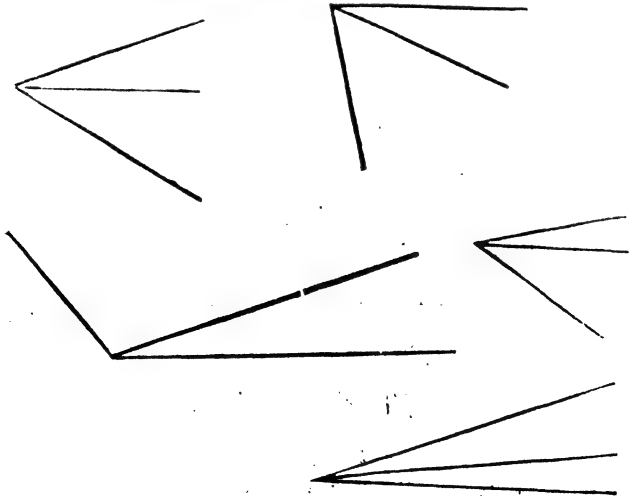
* ઈશાન ને પૂર્વની બરાબર વચ્ચેની દિશા.

પ્રશ્ન.

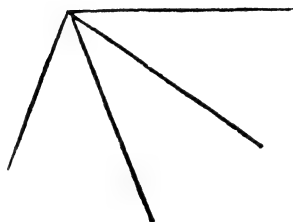
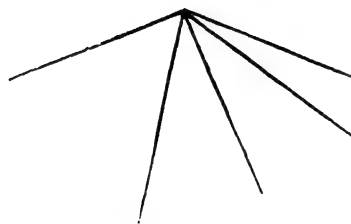
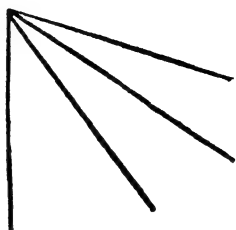
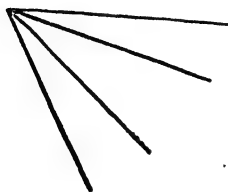
૧. ત્રિકોણમાપના ખુણા કેટલા અંશના છે તે જુઓ.
૨. નીચે આપેલા ખુણા માપો, અને તે કેટલા અંશના છે તે કહો.



૩. નીચે આપેલા પાસ પાસેના ખુણામાંનો દરેક ખુણો માપો; અને જંને ખુણાનો સરવાળો કરો. પછી આપો ખુણો માપો, અને તે પરથી પહેલાંના જવાબ ખરા છે કે કેમ તે જુઓ.



૪. ઉપર પ્રમાણેજ નીચે આપેલા ખુણાના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો. (બે જવાબમાં એક અંશનો તફાવત પડે તો તે દરમુજબ કરવામાં હરકત નથી.)



૫. એક વર્તુળ દોરો, અને તેના પરિઘના તમારી તરફના ભાગ પર કેટલાંક, અને તમારાથી આધેના ભાગ પર કેટલાંક, એવી રીતે બધાં મળીને ગમે તે પાંચ બિંદુ લો. આ બિંદુઓમાંથી વર્તુળના મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ દોરો, અને તેથી થતા એક પછી એક પાંચ ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. આ ઉપરથી વર્તુળમાં કેટલા કાટખુણા હોવાનું જણાઈ આવે છે ?

૬. એક વર્તુળ દોરો અને કંપાસ વડે તેના પરિઘના ચાર-પાંચ સરખા ભાગ પાડો. આ ભાગોનાં છેદનબિંદુઓમાંથી* વર્તુળના મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓની

* છેદનબિંદુ—કોઈ પણ સીધી કે વાંકી લીટીને જે બિંદુમાં છેદવામાં આવે છે, તે બિંદુને છેદનબિંદુ કહે છે.

વચ્ચેના ખુણા માપો, અને તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો.
શું માલમ પડ્યું ? “ તે સરખા છે. ”

૭. ગમે તેવા ખુણા દોરો અને તેમના અંશ અટકળથી નક્કી કરો. પછી કોણમાપક વડે ખુણા પ્રત્યક્ષ માપીને તમારી અટકળ કેટલે દરજ્જે ખરી છે તે જુઓ. ખુણા સાધારણ રીતે બરાબર માપતાં આવડે ત્યાંસુધી અભ્યાસ જારી રાખો. (અટકળથી માપવામાં ૫ અંશનો તફાવત પડે ત્યાંસુધી ચાલે.)

ખુણો દુભાગવાની રીત (કાગળની ઘડી વાળીને):—
આપેલા \angle અબક જેવડો ખુણો દોરો, અને તેને કાપી કાઢો. અબ, બક પર બરાબર પડે એવી રીતે કાગળ વાળો. વાળવાથી ખુણાના જે બે ભાગ થાય છે, તે એક બીજાની બરાબર છે એમ જણાઈ આવશે.

[આ પછીનો ભાગ શીખવતા પહેલાં કૌંસ, પરિધ, જ્યા, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, એ સંબંધી જે માહિતી પહેલાં આપેલી છે તેનું પુનરાવર્તન કરાવવું.]

બીજી રીત:—આપેલા અબક ખુણાનું જ મધ્યબિંદુ અને ગમે તે ત્રિજ્યા લઈને અબ, બકને અનુક્રમે જ તથા ફમાં છેદે એવો કૌંસ દોરો. ડ,ઈ મધ્યબિંદુ અને ડઈ જેટલી ત્રિજ્યા લઈને ફમાં એક બીજાને છેદે એવા કૌંસ દોરો. ફબ સાંધો. ફબ આપેલા ખુણાને દુભાગે છે.

૮. કેટલાક ખુણા લઈને તેમને ઉપર કહેલી રીતે દુભાગો, અને તેમના વિભાગ કોણમાપકથી માપીને તે બરાબર છે કે નહિ તે જુઓ.

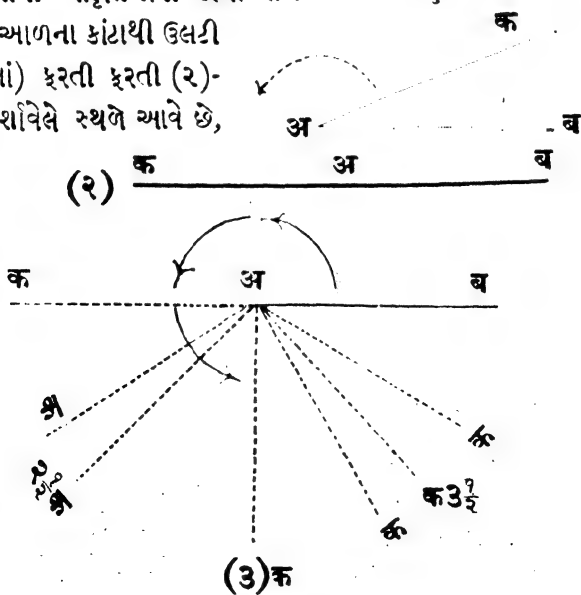
કૌંસ દુભાગવાની રીત:—અબ આપેલો કૌંસ છે. અબનો છાપો લો. અ,બ પર પડે એવી રીતે ઘડી વાળો. ઘડીથી અબના જે બે વિભાગ થાય છે, તે એક બીજા પર બરાબર આવી રહે છે; તે પરથી તે સરખા છે એ સ્પષ્ટ થાય છે.

બીજી રીત:—એક અથ ડૉંસ લો. અ મધ્યબિંદુ અને અથના અર્ધથી જરા મોટી ત્રિજ્યા લઈને એક ડૉંસ દોરો. તેટલીજ ત્રિજ્યા અને બ મધ્યબિંદુ લઈને આ ડૉંસને ક અને હમાં છેદે એવો બીજો ડૉંસ દોરો. કહ સાંધો. અથ ડૉંસને કહ દુભાગે છે.

૯. એક વર્તુળ દોરો. તેમાં ગમે તે એક અથ ડૉંસ લો. અથ ડૉંસને ક બિંદુમાં દુભાગો. વર્તુળના મધ્યબિંદુ મને અ, બ, કની સાથે સાંધો. અમક અને બમક ખુણા માપો અને તેમને સરખાવો. બીજા ડૉંસ લઈને ઉપલો પ્રયોગ કરો. આ ઉપરથી વર્તુળના મધ્યબિંદુ આગળ થતા ખુણા અને તે ખુણાની બાબુઓની વચ્ચેના ડૉંસોની વચ્ચે શો સંબંધ હોવાનું જણાઈ આવે છે ?

બહિર્વકકોણ.

પાસેની આકૃતિમાંની અક સળી જ્યારે બાહુની દિશામાં (બહિર્આળના કોટાથી ઉલટી દિશામાં) ફરતી ફરતી (૨)-થી દર્શાવેલે સ્થળે આવે છે,

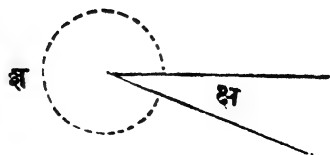
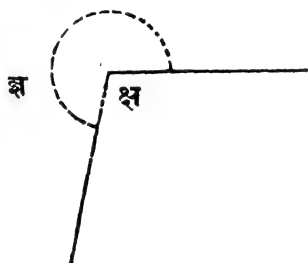
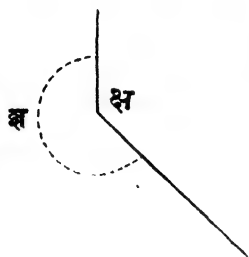


ત્યારે તે અબની સાથે બે કાટખુણા કરે છે. હવે જો તેજ સળી, વળી આગળ ફરતી ફરતી (૩)થી દર્શાવેલે સ્થળે આવશે, તો તે અબ સાથે જે ખુણો કરશે તે બે કાટખુણાથી મોટો થશે.

આ પ્રમાણે અક સળી (૨)થી દર્શાવેલા સ્થળ આગળથી શરૂ કરી બાણની દિશામાં ફરતાં ફરતાં પાછી અબ ઉપર જઈ પડે ત્યાંસુધીમાં અબ સાથે જે ખુણો કરશે, તે બે કાટખુણાથી મોટો અને ચાર કાટખુણાથી નાના થશે. એવા ખુણાને બહિર્વક ખુણો કે બહિર્વકકોણ કહે છે.

ખુણાનો ફરતો ભુજ સ્થિર ભુજથી શરૂ થતા વર્તુળના અર્ધા ભાગ કરતાં વધારે ભાગમાં થઈને જવાથી જે ખુણો થાય છે, તેને બહિર્વકકોણ કહે છે, એમ કહીએ તોપણ ચાલે.

નીચેની આકૃતિઓમાં ટપકાંની લીટીઓથી દર્શાવેલા ખુણા બહિર્વકકોણ છે. આ ખુણા ઉલટી દિશામાંથી જોયા હોય તો બહિર્વક દેખાતા નથી એ ઉઘાડું છે.



[ઉપલા ખુલામાંથી કોઈ પણ ખુણા જ્ઞની બાબુથી જોયો હોય, તો તે બે કાટખુણા કરતાં નાનો દેખાય છે; પણ તે જ્ઞની બાબુથી જોયો હોય તો બે કાટખુણા કરતાં મોટો દેખાય છે. જ્ઞની બાબુ પરનો ખુણો અંતર્વક ખુણો કહેવાય છે. અર્થાત્, અંતર્વક ખુણો એટલે બે કાટખુણાથી નાનો ખુણો.]

પ્રશ્ન.

૧. ઘડિઆળમાં ૯ વાગે છે ત્યારે કલાકના અને મિનિટના કાંટા વચ્ચે કેટલા અંશનો બહિર્વકકોણ થાય છે ?

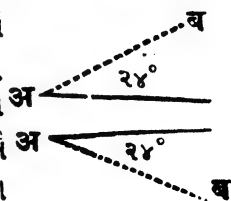
૨. બે કાંટાની વચ્ચેનો બહિર્વક ખુણો અંતર્વક ખુણાથી ત્રણગણો છે; તો તે બહિર્વક ખુણો કેટલો મોટો છે ?

૩. ઉપલા પ્રશ્નમાં બહિર્વક ખુણો અંતર્વક ખુણાથી બમણો, ૪ ગણો, ૫ ગણો છે, એમ ધારીને જવાબ કાઢો.

સૂચના—બે લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો માપતી વખતે અંતર્વક ખુણો લેવાનો રિવાજ છે, એ ધ્યાનમાં રાખવું.

સાપેક્ષ દિશા.

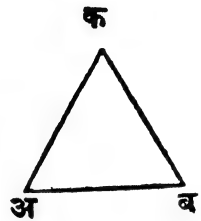
એક સ્થળ બીજા સ્થળની કઈ દિશામાં છે તે જોવાની રીત:—ધારો કે **અ** સ્થળ **અ** સ્થળની કઈ દિશામાં છે એ શોધી કાઢવું છે. **અ** સ્થળ મુખ્ય ચાર દિશામાંથી લગભગ કઈ દિશાની પાસે છે એ પહેલાં જોવું. જો તે પૂર્વ તરફ છે એમ લાગે, તો **અ**માં થઈને જાય એવી એક સીધી લીટી બરાબર પૂર્વ તરફ દોરવી. પછી **અ**થી **અ** સુધી લીટી દોરવી, અને આ લીટીનો પૂર્વ તરફ દોરેલી લીટીની સાથે જે ખુણો થાય છે તે ખુણો માપવો. ધારો કે આ ખુણો **અ** ૨૪ અંશનો છે. હવે જો **અ**થી પૂર્વ **અ** અંતરનારી લીટીથી ઉત્તર તરફ હોય, તો



બની દિશા 'પૂર્વની ઉત્તરમાં ૨૪ અંશ છે' એમ કહેવું; અને અબ લીટી પૂર્વ બતાવનારી લીટીની દક્ષિણમાં હોય, તો બની દિશા 'પૂર્વની દક્ષિણમાં ૨૪ અંશ છે' એમ કહેવું.

પ્રશ્ન.

૧. અબક અને બઅક ખુણા દરેક ૬૦ અંશના છે. હવે જો અબ લીટી પૂર્વ-પશ્ચિમ હોય, તો ક, અની કઈ દિશામાં છે? બની કઈ દિશામાં છે?



૨. એક માણસ અ સ્થળથી નીકળી ચાર માઇલ બરાબર ઉત્તર તરફ જાય છે, અને ત્યાંથી ૪ માઇલ બરાબર પશ્ચિમ તરફ જઈને બ સ્થળે પહોંચે છે; તો બ, અની કઈ દિશામાં છે? (એક માઇલ માટે અર્ધો ઇંચ એ સ્કેલ લઈને આકૃતિ દોરો.)

[કોઈપણ સ્કેલ લઈને દોરેલી આકૃતિની મદદથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ કાઢો.]

૩. જેની લંબાઈ ૪૦ ફુટ છે અને પહોળાઈ ૨૦ ફુટ છે, એવા અબકહ લંબચોરસમાં ક, અની કઈ દિશામાં છે? અબ બરાબર પૂર્વપશ્ચિમ છે. (સ્કેલ-૧"=૨૦ ફુટ.)

૪. બની પશ્ચિમે અ ૨.૫ માઇલ છે અને અની દક્ષિણમાં ક ૪.૫ માઇલ છે; તો બથી ક કેટલું આધું છે અને બની કઈ દિશામાં છે?

૫. એક માણસ અ સ્થળથી ૩ માઇલ બરાબર દક્ષિણ તરફ જાય છે. ત્યાંથી તે બરાબર ઈશાન તરફ ૮ માઇલ

જઈને જ સ્થળે પહોંચે છે; તો અથી જ કેટલું આધું છે ? અને અની કઈ દિશામાં છે ?

૬. અ, જની વાયવ્યમાં ૧૭.૫ માઇલ છે; જ, જની ઈશાનમાં ૨૩ માઇલ છે; તો ક, અથી કેટલું આધું છે, અને અની કઈ દિશામાં છે ?

૭. જ અને ક એ સ્થળો અથી યરાયર ૫ માઇલ પર છે; અને તે અનુક્રમે દક્ષિણની પશ્ચિમમાં ૩૬° અને પશ્ચિમની દક્ષિણમાં ૧૮° છે; તો જ, જની કઈ દિશામાં છે, અને તે બેની વચ્ચેનું અંતર કેટલું છે ?

૮. જ અને ક સ્થળોની વચ્ચે ૩.૫ માઇલનું અંતર છે, અને જ, અની યરાયર ઉત્તરમાં છે. ક, જની યરાયર પૂર્વમાં અને અની યરાયર ઈશાનમાં છે; તો કનું અથી અંતર કેટલું ?

૯. અ અને જ બેટોની વચ્ચે ૮૦૦ ફુટનું અંતર છે. જ, અની યરાયર ઉત્તરે છે. એક વહાણ જથી નીકળીને યરાયર પૂર્વ તરફ ૫ મિનિટ સુધી ગયા પછી તેની દિશા અની ઉત્તરની પૂર્વમાં ૫૭° અંશ હોવાનું જણાઈ આવે છે; તો તે વહાણ ૫ મિનિટમાં કેટલું અંતર આપ્યું, અને તેનો દર કલાકે વેગ કેટલો ?

૧૦. એક વિભાજકની બાજુઓની લંબાઈ ૧૦ સે. મી. છે, અને તેમની વચ્ચે ૩૫°નો ખૂણો થતા સુધી તે આધી કરેલી છે; તો વિભાજકની બાજુઓની અણીઓની વચ્ચે કેટલું અંતર છે ?

૧૧. એક સીધી વાડથી ૨૦ હાથને અંતરે દોટલા ખુંટા સાથે એક બકરીને દોરીથી બાંધેલી છે; અને તે બકરી ખુંટાથી ૩૫ હાથ આધી જઈ શકે એટલી તે દોરી લાંબી છે; તો તે બકરી તે વાડનો કેટલો ભાગ ખાઈ શકશે ?

અમુક અંશનો ખુણો કરવા વિષે.

અમુક અંશનો ખુણો દારવાની રીત:—એક સીધી લીટી દોરવી. તે લીટીના ડાબા છેડા પર કોણમાપકનું મધ્ય-ખિંદુ, અને તે લીટી પર કોણમાપકની જમણી બાજુ બરાબર પડે એવી રીતે કોણમાપક મૂકવો. પછી જેટલા અંશનો ખુણો કરવો હોય, તેટલા અંશ બતાવનારી કોણમાપક પરની લીટીના છેડા પાસે કાગળ પર પેન્સિલથી ઝીણું ટપકું કરવું, અને તે ટપકાથી પહેલી લીટીના ડાબા છેડા સુધી લીટી દોરવી.

(પેન્સિલને બદલે વિભાજકની આણીથી કે ટાંકણીથી આ ખિંદુ લીધું હોય તો ખુણો વધારે બરાબર નીકળશે.)

નીચેના અંશના ખુણા કરો:—

(૧) ૩૦, ૬૦, ૪૫, ૧૩૫, ૭૫, ૧૦૦, ૧૨૦.

(૨) ૧૮, ૨૩, ૮૯, ૧૨૫, ૫૭, ૬૪, ૧૧૧, ૧૫૨, ૧૭૮.

૩૦ અંશનો **અબક** ખુણો કરો અને તેમાં ૨૫ અંશનો **કબડ** ખુણો ઉમેરો. એવી રીતે બનેલો **અબક** ખુણો માપો, અને તેના અંશ બરાબર ૫૫ થાય છે કે કેમ તે જુઓ. થતા ન હોય તો ભૂલ ક્યાં છે તે ખોળી કાઢો.

અબક અને **કબડ** એ ખુણા અનુક્રમે નીચેના અંશના લઘુને ઉપલો પ્રયોગ કરો:—

૨૦, ૭૦; ૫૨, ૨૮; ૪૩, ૧૭; વગેરે.

અબક, કબડ, ડબર્ડ ખુણા અનુક્રમે ૧૭, ૨૩, ૩૮ અંશના લો. **અબર્ડ** ખુણો માપો, અને તેના અંશ ૭૮ થાય છે કે કેમ તે જુઓ. થતા ન હોય તો પહેલાં માપતી વખતે ભૂલ ક્યાં થઈ તે શોધી કાઢો.

અબક, કબડ, ડબર્ડ એ ખુણા નીચેના અંશના લઘુને ઉપર મુજબ પ્રયોગ કરો:—

(૧) ૭૦, ૧૨, ૨૮; (૨) ૧૧૬, ૨૦, ૩૪; (૩) ૫, ૧૮, ૧૦૦.

અબક ખુણા ૧૩૦° નો લઈને તેમાંથી ૪૦° , ૩૦° , ૨૫° ના ખુણા કાપી કાઢો. બાકી રહેલો ખુણો ૩૫° નો થાય છે કે નહિ તે જુઓ. ન થાય તો ભૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

બીજા ખુણા લઈને ઉપલો પ્રયોગ ફરીથી કરો.

નીચેના અંશના ખુણા અટકળથી કાઢો, અને પછી તેમને પ્રત્યક્ષ માપી જુઓ. ખુણા સાધારણ રીતે બરાબર દોરતાં આવડે ત્યાંસુધી અભ્યાસ જારી રાખો:— ૪૫° , ૨૨.૫° , ૩૦° , ૨૦° , ૬૦° , ૧૦° , ૭૦° , ૮૦° , ૧૨૦° , ૧૩૫° .

પાસેની આકૃતિઓને ત્રિકોણ કહે છે. (ત્રિ=ત્રણ, કોણ=ખુણો. જેને ત્રણ ખુણા હોય એવી આકૃતિ.) આ



આકૃતિઓની માફક જે આકૃતિઓની હદ ત્રણ સીધી લીટીઓથી બંધાયેલી હોય તે બધી આકૃતિઓને ત્રિકોણ* કહે છે.

નીચેનાં માપ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવો:—

અબ=૧.૩", \angle અબક=૩૦°, \angle બઅક=૬૦°.

„ =૧", „ ૫૦°, „ =૫૦°.

„ =૧.૮", „ ૬૦°, „ =૩૦°.

.....વગેરે.

એક લીટી બીજી પર પડવાથી થતા ખુણા.

અબક ગમે તેટલા કદનો સાંકડો ખુણો લો. તેની અબ બાજુ ડ સુધી વધારો.

કબડ ખુણો સાંકડો છે

કે પહોળો ?

ક બ અ

* ન્યાખ્યા—ત્રણ બાજુ કે સીધી લીટીઓ વડે જેની હદ બંધાયેલી હોય છે તે આકૃતિને ત્રિકોણ કહે છે.

અવક કાટખુણો દોરો. તેની અવ બાજુ ડ સુધી લંબાવો. કબડ ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો ?

ગમે તેવડો એક અવક પહોળો ખુણો કાઢો. તેની અવ બાજુ ડ સુધી વધારો. કબડ ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો ?

અવક ૩ કાટખુણા જેવડો કાઢો. અવને ડ સુધી વધારો. કબડ ખુણો માપો અને તે કેટલા કાટખુણા બરાબર છે તે કહો.

(કોણમાપકનો ઉપયોગ કરીને નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો.)

અવક લીટી પર બક લીટી ઉભી છે—

અને અવક ખુણો ૫૩ અંશનો છે; તો કબડ કેવડો હશે ?

„ „ ૭૮ „ „ „ „

„ „ ૧૧૦ „ „ „ „

„ „ ૧૩૭ „ „ „ „

ઉપલા પ્રશ્નો પૈકી દરેક પ્રશ્નમાં અવક ખુણો કાટખુણાથી કેટલે અંશે ઓછો કે વધો છે તે જુઓ, અને તેવીજ રીતે કબડ ખુણો કાટખુણાથી કેટલે અંશે વધો છે કે ઓછો છે તે જુઓ. આ ઉપરથી અવક અને કબડ ખુણાઓની વચ્ચે શો સંબંધ જણાઈ આવે છે ? “ તે એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે. ”

ઉપલા પ્રયોગ પરથી એક લીટી બીજી પર પડવાથી થતા પાસપાસેના ખુણાઓના સંબંધમાં કયો નિયમ નીકળે છે ?

“ એક લીટી બીજી પર પડી હોય, તો બીજી લીટીની એક બાજુ પર જે પાસપાસેના ખુણા થાય છે, તેમનો સંરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે. ”

(કોણમાપકનો ઉપયોગ કર્યા વગર નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર કહો.)

અવડ એક સીધી લીટી છે. તેની સાથે—

બક લીટી ૬૫° નો ખુણો કરે છે, તો કબડ ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ?

„ ૧૨૦° „ „ „

„ ૧૨૭° „ „ „

અવડ લીટી લો. તેની સાથે ગમે તેવડો ખુણો કરે એવી

બક લીટી દોરો. કાગળ

વાળીને અવક ખુણાને

દુભાગો. તેજ પ્રમાણે

કબડ ખુણાને દુભાગો.

ખુણા દુભાગનારા સળ

બફ અને વર્ફ લીટીઓ

વડે દર્શાવો. $ઈવફ$ ખુણો માપો. તે કેવડો છે? આ ઉપરથી

અવક અને કબડ ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા

બરાબર જણાઈ આવે છે? “ બે કાટખુણા બરાબર. ”

અવ લીટી લો. તેની એક બાજુએ બઅક ૫૩ અંશનો

ખુણો કરો. બીજી

બાજુએ બઅડ ૧૦૭

અંશનો ખુણો કરો.

કઅડ ખુણો કેટલા

અંશનો થાય છે? તે

બે કાટખુણા કરતાં કેટલે અંશે ઓછો કે વધારે છે? કઅડ

સીધી લીટી છે કે? કઅડ સીધી લીટી દોરો. તે સીધી

લીટી થવા માટે બઅક અને બઅડ બે ખુણાઓનો

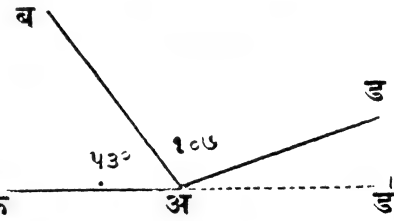
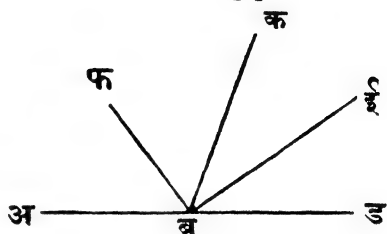
સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થવો જોઈએ?

ઉપલા પ્રશ્નોમાં બઅક અને બઅડ અનુક્રમે ૫૦ અને

૧૧૦ , ૧૦૫ અને ૭૫ , ૫૧ અને ૧૨૯ , ૧૧૦ અને ૯૦ ,

૪૯ અને ૧૪૧ , ૩૦ અને ૧૭૦ લો અને ઉપરના જેવાજ

પ્રયોગ કરી જુઓ.



આ ઉપરથી કબડ લીટી સીધી હોવા માટે વચક અને વચક ખુણા વચ્ચે કેવો સંબંધ હોવો જોઈએ (એટલે તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થવો જોઈએ) એ વિષે કયો સામાન્ય નિયમ જણાઈ આવે છે ? “ તેમનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર હોવો જોઈએ. ”

અવક અને કબડ ખુણા અનુક્રમે ૬૧° અને ૧૦૩° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે ?

અવક અને કબડ ખુણા અનુક્રમે ૧૧૮° અને ૭૨° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે ?

અવક અને કબડ ખુણા અનુક્રમે ૧૦૮° અને ૮૧° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે ?

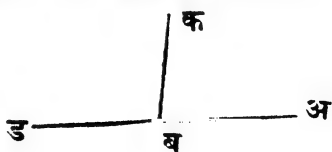
અવક અને કબડ ખુણા અનુક્રમે ૭૧° અને ૧૧૦° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે ?

અવક અને કબડ ખુણા અનુક્રમે ૫૦° અને ૧૩૦° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે ?

અવક અને કબડ ખુણા અનુક્રમે ૧૩૫° અને ૫૨° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે ?

ઉપરના પ્રયોગો ઉપરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ? “ જો બે પાસપાસેના ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર હોય, તો તેમના બહારના ભુજા એક સીધી લીટીમાં હોય છે. ”

પાસેની આકૃતિમાં અવક અને કબડ ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે ? આ ઉપરથી અવક, કબડ, ડબઈ, અને ઈચઅ ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે એ તમે કહી શકશો ?



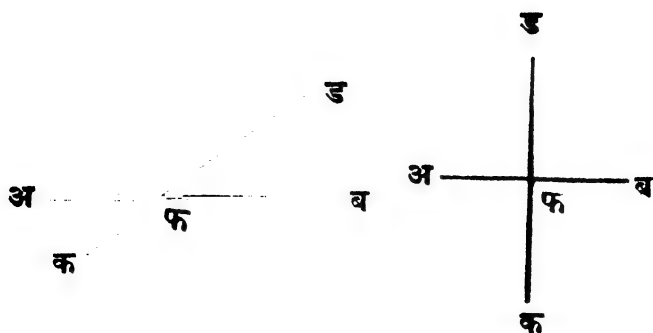
વચ્ચેના ખુણા કેટલો મોટો છે તે ખુણાને પ્રત્યક્ષ માપ્યા વગર કહો. ઉત્તરનું કારણ આપો.

એક બીજને છેદતી બે સીધી લીટીઓની વચ્ચેના ખુણા.

ગમે તેટલી લાંબી બે કામડી કે સળી લો, અને તે એકજ દિશામાં પડે એવી રીતે તેમને એક ઉપર એક મૂકીને વચ્ચે કોઈ પણ ઠેકાણે ટાંકણી ખોસો. ટાંકણી સહિત કામડીઓ ઉંચકીને ટાંકણી એક ઘડિઆળની (કાગળની) તાસકના* મધ્યબિંદુમાં ખોસો. પછી બે કામડી પૈકી એકનો એક છેડો પકડીને તેને ગમે તે દિશામાં ફેરવો. તે છેડાની, વર્તુળના $\frac{1}{2}$ ભાગ જેટલી પ્રદક્ષિણા થાય છે, એટલે બીજા છેડાની પણ $\frac{1}{2}$ જેટલીજ પ્રદક્ષિણા થાય છે. પહેલા છેડાની $\frac{1}{2}$ પ્રદક્ષિણા થાય છે, એટલે બીજાની પણ $\frac{1}{2}$ પ્રદક્ષિણા થાય છે. તેમજ પહેલાની $\frac{1}{2}$ પ્રદક્ષિણા થાય છે એટલે બીજાની પણ તેટલીજ થાય છે, એ ધારીને જોવા છોકરાઓને કહેવું. કામડીના જુદા જુદા ભાગોમાં ટાંકણી ખોસીને ઉપલો પ્રયોગ કરો. કામડીના બંને છેડાની પ્રદક્ષિણા સરખી થવી, એ કામડીના જે બે ભાગો ટાંકણીની આસપાસ ફરે છે, તેમની લંબાઈના ઓછાવત્તાપણા પર અથવા સરખાપણા પર આધાર રાખે છે કે ? “ ના. ”

ઉપલા પ્રયોગમાંથી નીકળતા નિયમની મદદથી નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો:—

* ઘડિઆળની તાસકને બદલે પહેલાં રજમા પાતા પર કહેલી આકૃતિ લીધી હોય તોપણ ચાલે.

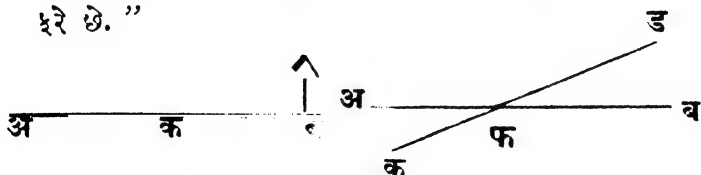


અવ અને કડ કામડીઓને એક ખીજી પર રાખીને ફ સ્થળે ટાંકણીથી જડી દીધી છે. હવે કડ કામડીનો ડ છેડો જો વર્તુળના $\frac{3}{4}$ ભાગમાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો ક છેડો વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરશે?

ઉપલા પ્રયોગમાં ડ છેડો એક કાટખુણામાં (વર્તુળના $\frac{1}{4}$ ભાગમાં) થઈને જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો ક છેડો કેટલા મોટા ખુણામાં થઈને ફરશે?

ઉપલા પ્રયોગો પરથી, પોતાનામાંના કોઈ પણ િંદુની આસપાસ ફરતી લાકડીના કે લીટીના બે છેડા જો ખુણાઓમાં થઈને ફરે છે, તે ખુણાઓનો એક ખીજા સાથે શો સંબંધ હોવાનું જણાઈ આવે છે?

“ જ્યારે કોઈ લીટી પોતાનામાંના કોઈ િંદુની આસપાસ ફરે છે, ત્યારે તેના બે છેડાનાં અંતરે તે િંદુથી ગમે તેટલાં ઓછાં વર્ત્તો હોય, તોપણ તે છેડા સરખાજ ખુણામાં થઈને ફરે છે. ”



અવ લીટી ક િંદુની આસપાસ ફરે છે. જો તેનો કવ ભાગ $\frac{1}{4}$ ના ખુણામાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો કઅ ભાગ કેટલા અંશના ખુણામાં થઈને ફરશે?

અવ લીટી પર કડ લીટી (અંતેની લંબાઈ એકજ દિશામાં હોય એવી રીતે) પડેલી છે. કડ લીટી ફ બિંદુની આસપાસ ફરીને અવ સાથે વફડ ખુણો ૨૦ અંશનો કરે, તો અફક ખુણો કેટલા અંશનો થાય ?

ઉપલા પ્રયોગમાં ડ છેડો ૪૫, ૬૦, ૭૫, ૧૧૫ અંશના ખુણામાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો ક છેડો કેવડા ખુણામાં થઈને ફરશે ?

ઉપલા પ્રયોગમાં અફક ખુણો કેટલો મોટો થશે ? કફવ ખુણો કેવડો ? વફડ ખુણો ૩૮ અંશનો છે એમ ધારીને બાકીના ત્રણ ખુણા કેવડા છે તે શોધી કાઢો.

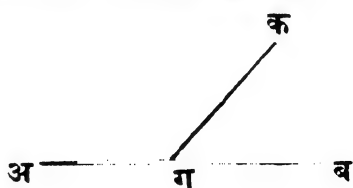
વફડ ખુણો ૧૫૦, ૯૪, ૮૫, ૧૧૩ અંશનો ધારીને ઉપલા પ્રશ્નનો ઉત્તર આપો.

ઉપલા પ્રશ્નમાં અફક અને કફવ, તથા વફડ અને કફઅ એ ખુણાઓને સરખાવો. તમને શું જણાઈ આવે છે ?

એક અફવ લીટી દોરો. તેને છેદનારી ગમે તે કફક લીટી દોરો. વફડ ખુણો કાપી કાઢો, અને તે કફઅ પર મૂકો. તેમજ અફક ખુણો કાપી કાઢી તેને કફવ પર મૂકો. તમને શું જણાય છે ?

એક બીજીને છેદતી બે સીધી લીટીઓથી બનેલા ખુણાઓ વિષે ઉપલા પ્રયોગમાંથી કયો નિયમ નીકળે છે ? “ બે લીટી એક બીજીને છેદે છે ત્યારે જે ખુણા થાય છે, તેમાંથી સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર હોય છે.”

પાસેની આકૃતિમાં વગડ ખુણો 130° છે; તો અગડ ખુણો વગક ખુણા બરાબર છે, એમ બાકીના ખુણા પ્રત્યક્ષ માપ્યા સિવાય સિદ્ધ કરો.



સમાંતર લીટીઓ.

કેટલીક સમાંતર લીટીઓની અને કેટલીક અસમાંતર લીટીઓની જોડો પાટીઆ પર કાઢવી. તેમની (દરેક જોડની) એક બાજુના છેડાઓની વચ્ચેનું અંતર કેટલું છે, અને તે આગળ (બીજા છેડા તરફ) ઓછું થતું જાય છે કે વધતું થતું જાય છે, તે જોવા છોકરાઓને કહેવું. “કેટલીકની વચ્ચેનું અંતર વધતું જાય છે”, “કેટલીકની વચ્ચેનું અંતર ઓછું થતું જાય છે”, અને “કેટલીકની વચ્ચેનું અંતર પ્રથમ હટું તેટલુંજ રહે છે”, એમ છોકરાઓ કહેશે. જેમની વચ્ચેનું અંતર ઓછું થતું જાય છે, તે, જે બાજુએ અંતર ઓછું છે તે બાજુ તરફ વધારી હોય, તો તેમના છેડા મળશે કે? “હા.” સામી બાજુ તરફ વધારી હોય તો તેમના છેડા મળશે કે? “ના.” જે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર વધતું જાય છે, તે, જે દિશામાં અંતર વધતું જાય છે તે દિશામાં વધારી હોય, તો તેમના છેડા મળશે કે? “ના.” સામી દિશામાં વધારી હોય તો છેડા મળશે કે? “હા.” જે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર કાયમ રહે છે, તે જમણી બાજુએ વધારી હોય તો એક બીજીને મળશે કે? “ના.” ડાબી બાજુએ વધારી હોય તો? “ના.” આ લીટીઓ પહેલાં કહેલી બે પ્રકારની લીટીઓથી જુદા પ્રકારની છે. એવી લીટીઓને સમાંતર લીટીઓ કહે છે.

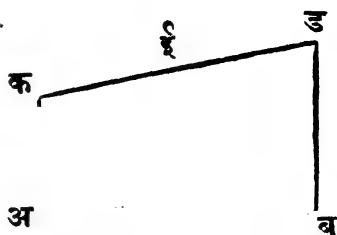
સમાંતર (સમ + અંતર) = જેમની વચ્ચેનું અંતર બધે સરખું હોય છે તે.

જેમની બે બાજુઓ સમાંતર હોય એવી કેટલીક વસ્તુઓનાં નામ આપો.

સમાંતર લીટીઓ વિષેની કલ્પનાનું વધારે સ્પષ્ટીકરણ.

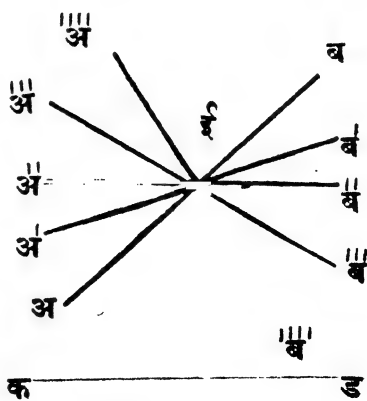
એક સીધી અથવા સળી પાટીઆ પર આડી મૂકી છે. તેથી

કેટલેક અંતરે ખીજ એક સીધી
કડ સળાઈ સ્થળે ખોસેલી
ટાંકણીથી પાટીઆ સાથે જડી
દીધી છે. આ સળાને પહેલાં
ગમે તે સ્થિતિમાં હોવા દો.
આ સ્થિતિમાં ક ને ડ



છેડાનું અવના છેડાઓથી અંતર માપો. કડનો જે છેડો અવથી
વધારે આધો હોય, તે છેડાને અવની પાસે લઈ જાઓ,
અને તે છેડો અવની પાસે લઈ જતી વખતે, ખીજ છેડાનું
અવથી જે અંતર હોય તેમાં શો ફેરફાર થાય છે, તે જુઓ.
“ પહેલાં જે છેડો આધો હતો તેનું અંતર જેમ જેમ ઓછું
કરવામાં આવે છે, તેમ તેમ ખીજ છેડાનું અંતર વધતું જાય
છે.” એ પ્રમાણે ફેરફાર થતાં થતાં કોઈ પણ વખતે અવથી
ક અને ડ છેડાનું અંતર સરખું થાય છે કે? “ થાય છે. ”
એવી સ્થિતિમાં બે લીટીઓ હોય ત્યારે તેમની વચ્ચે બધે
કેકાણે સરખું અંતર હોય છે, માટે એવી સ્થિતિમાં તેમને
સમાંતર કહે છે.

પાસેની આકૃતિમાં અવ
લીટી ફરે છે ત્યારે તે
જે જુદી જુદી સ્થિતિમાં
આવે છે, તે સ્થિતિ અવ,
અવ, અવ એ લીટીઓ
દર્શાવે છે. અવ લીટી
એવી છે, કે તેને ડાખી
ખાજુએ વધારી હોય, તો તે
એક અમર્યાદ કડ લીટીને
છેદે. અવ એવી છે, કે તેને ડાખી ખાજુએ વધારી હોય, તો



તે કડને છેદે... 'અ' 'બ' લીટી એવી છે, કે તેને ડાબી બાજુએ વધારી હોય, તો તે કડને છેદે નહિ, પરંતુ તેને જમણી બાજુએ વધારી હોય, તો કડને છેદે. 'અ' 'બ' લીટી એવી છે કે તે... વગેરે.

ઉપલા પ્રયોગ પરથી એમ જણાય છે, કે અબ લીટી ફેની આસપાસ ફરવામાં અમુક હદ સુધીજ, ડાબી બાજુએ વધારી હોય તો કડને છેદે છે. તે હદની બહાર, તે લીટીને જમણી તરફ વધારી હોય તો કડને છેદે છે. આ બે હદની વચ્ચે એવી એક સ્થિતિ હોવી જોઈએ, કે તે સ્થિતિમાં તે લીટીને ગમે તે દિશામાં વધારી હોય, તોપણ તે કડને મળે નહિ. એવી સ્થિતિમાં બે લીટી હોય તો તેમને સમાંતર લીટીઓ કહે છે.

કેટલાક ખુણાનાં નામ.

અબ, કડ લીટી-
 એને ફેફ લીટી મ
 અને હ બિંદુમાં છેદે ક
 છે. ફેફ લીટી વડે અબ, હ
 કડ લીટીઓની સાથે અ મ
 બે ખુણા થાય છે, વ
 તેમને નીચે પ્રમાણે ફ
 નામ આપ્યાં છે:—

— / કહમ અને / હમબને વ્યુત્ક્રમ (વિરુદ્ધ બાજુએ હોય એવા) ખુણા કહે છે.

/ હહમ અને / હમઅને વ્યુત્ક્રમ ખુણા કહે છે.

/ ફેફક, / ફેફડ, / ફમઅ, અને / ફમબને બહારના ખુણા કહે છે. (કારણ કે તે આપેલી લીટીઓની બહારની બાજુના ખુણા છે.)

∠ઈહડ, ∠હમબને સંગત ખુણા કહે છે.

∠ઈહક, ∠હમઅને " " "

∠કહમ, ∠હમઅ, ∠હમઅ, ∠હમબને અંદરના ખુણા કહે છે. (કારણ કે તે આપેલી લીટીઓની અંદરની બાજુના ખુણા છે.) એમાંથી ∠કહમ અને ∠હમઅ એ રૂફની એકબાજુ બાજુએ છે, તેથી તેમને એકબાજુ બાજુ તરફના અંદરના ખુણા કહે છે. તેમજ ∠હમઅ અને ∠હમબ રૂફની એકબાજુ બાજુએ છે, તેથી તેમને પણ એક બાજુ તરફના અંદરના ખુણા કહે છે.

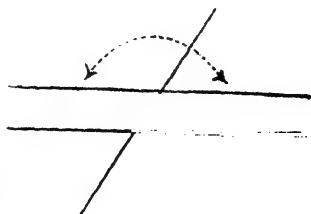
તમારી એક્સર્સાઈઝ બુકમાં દોરેલી સમાંતર લીટીઓની જુદી જુદી ચાર જોડો લો. તેમને છેદનારી ગમે તે લીટીઓ દોરો. છેદનારી લીટીઓને લીધે થતા વ્યુત્ક્રમ ખુણા માપો. તેમને એક બીજા સાથે (વ્યુત્ક્રમ ખુણાની જોડમાંના એક ખુણાને બીજા સાથે) સરખાવો. તમને શું જણાય છે ?

વ્યુત્ક્રમ ખુણાઓમાંથી એક ખુણો કાપી કાઢીને બીજા ખુણા પર મૂકો. શું દેખાય છે ? “ તે સરખા છે. ”

સમાંતર ન હોય એવી બે લીટી લો. તેમને છેદે એવી એક લીટી દોરો. આ લીટીથી થતા વ્યુત્ક્રમ ખુણા માપો, અને તેમને સરખાવો. તે સરખા છે કે ? “ ના. ”

આ ઉપરથી સમાંતર લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ ખુણા અને અસમાંતર લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ ખુણાની વચ્ચે તમને શો તફાવત જણાય છે ?

તમારી એક્સર્સાઈઝ બુકમાં દોરેલી ગમે તે બે સમાંતર લીટીઓ લો. તેમને છેદનારી એક લીટી દોરો. આ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના આ છેદનારી લીટીની એક બાજુનો (ડાબી કે જમણી



બાળુનો) કાગળનો ભાગ કાતરથી કાપી કાઢો. આ ભાગ અર્ધા વર્તુળ જેટલો ફેરવીને (આકૃતિ જુઓ) બીજા બાળુના ભાગ પર એવી રીતે મૂકો કે વ્યુત્ક્રમ ખુણા એક બીજા પર પડે. આ ઉપરથી વ્યુત્ક્રમ ખુણા વિષે તમે શું શીખ્યા ?

સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે એક બાળુ પર જે બહારનો ખુણો થાય છે, તેને સામેના (સંગત) ખુણા સાથે સરખાવો. અસમાંતર લીટીઓ લઈને એજ પ્રયોગ કરો. શો તફાવત જણાઈ આવે છે ? “ સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે થતા ખુણા પૈકી બહારનો ખુણો તેજ બાળુના સંગત ખુણા બરાબર હોય છે. અસમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે થતા ખુણા પૈકી બહારનો ખુણો તેજ બાળુ પરના સંગત ખુણાની બરાબર હોતો નથી.”

સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે તે લીટીની એક બાળુએ જે અંદરના ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ? બીજા બાળુના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કરો. તે કેટલો થાય છે ? “ બે કાટખુણા.”

જેમની વચ્ચેનું અંતર જમણી બાળુ તરફ ઓછું થતું જાય છે, એવી લીટીઓની જોડ લઈને, તેમને છેદનારી લીટીને લીધે જમણી બાળુએ થતા બે અંદરના ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. આ સરવાળો કેટલો થાય છે ? બે કાટખુણાથી ઓછો કે વધો ? “ ઓછો.”

જેમની વચ્ચેનું અંતર જમણી તરફ વધતું જાય છે, એવી લીટીઓની જોડ લઈને, તેમને છેદનારી લીટીને લીધે જમણી તરફ થતા બે અંદરના ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. તે સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય છે કે વધારે ? “ વધારે.”

સમાંતર લીટીઓના સંબંધમાં ઉપર જે પ્રયોગો કર્યા છે, તે પરથી તેમના કયા ધર્મો જણાઈ આવે છે ?

“જે એક લીટી બે સમાંતર લીટીઓને છે, તે—

(૧) વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા હોય છે;

(૨) સંગત ખુણા સરખા હોય છે;

(૩) છેદક લીટીની એક બાજુ પરના બે અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.”

આ ધર્મો સમાંતર લીટીઓ સિવાય બીજી લીટીઓમાં દેખાઈ આવતા નથી.

સૂચના:—ત્રીયેની વ્યાખ્યા અને આ પ્રકરણમાં આવેલી બીજી વ્યાખ્યાઓ આ પ્રકરણ ચાલતું હોય ત્યારે વિદ્યાર્થીઓને સમજાવવી, અને પ્રકરણ પુરું થયા પછીજ તેમની પાસે મોઢે કરાવવી.

સમાંતર લીટીઓની વ્યાખ્યા:—જે લીટીઓ (એકજ સપાટીમાં* હોઈ એવી હોય છે, કે તે) કોઈ પણ બાજુએ ગમે તેટલી વધારી હોય તે છતાં પણ એક બીજીને મળતી નથી, તે સમાંતર લીટીઓ કહેવાય છે.

‘એકજ સપાટીમાં હોઈ’ આ શબ્દો શા માટે વાપર્યા છે ? એક પેન્સિલ પૂર્વપશ્ચિમ પકડી રાખી હોય, અને તે પર થોડે અંતરે બીજી પેન્સિલ પહેલીને અસમાંતર છતાં દક્ષિણુક્તિર પકડી રાખી હોય, તો તે પેન્સિલોથી દર્શાવાતી લીટીઓ ગમે તેટલી વધારી હોય તોપણ એક બીજીને બીલકુલ મળશે નહિ. પણ તે સમાંતર છે કે ? “ના.” આ ઉપરથી ‘એકજ સપાટીમાં’ એ શબ્દોની જરૂર સમજાય છે કે ?

બે સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે એક બાજુએ

* સપાટી શબ્દનો અર્થ આગળ બીજા પ્રકરણમાં આવશે.

જે અંદરના ખુણા થાય છે, તે પૈકી એક ખુણો ને 100° નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ ?

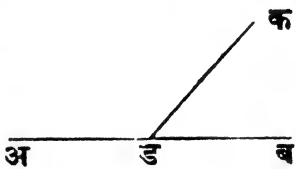
અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો ને 10° નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય ?

અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો ને 75° નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય ?

અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો ને 180° નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય ?

આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી દોરવા વિષે.

સમાંતર લીટીઓના ધર્મો વિષે જે કહેવામાં આવ્યું છે, તે ઉપરથી સમાંતર લીટીઓ દોરવાની કોઈ રીત તમને જણાઈ આવે છે કે ? ધારો કે



અબ લીટીને સમાંતર લીટી અ ડ બ
ક બિંદુમાંથી દોરવી છે; તો તે કેમ દોરશે ? કમાંથી અબ લીટીને ગમે તે એક ડ બિંદુમાં મળનારી એક કડ લીટી દોરો. કડબ ખુણો માપો. કોઈ એક લીટી ક પાસે કેવડો ખુણો કરે તો તે લીટી અબને સમાંતર થાય ? “ \angle કડબ જોટકો.” કડની કઈ બાજુએ ? “કડબથી વિરુદ્ધ બાજુએ.”

ઉપલા પ્રશ્નમાં કમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટી કાઢીએ, તો કની જમણી તરફ અંદરની બાજુએ જે ખુણો થાય તે કેવડો હોય ? તે ખુણો દોરીને સમાંતર લીટી દોરી શકાય કે ? અબ લીટી અને ક બિંદુ લઈને ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે કમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટી દોરો.

એક અવ લીટી લો. તેની ઉપલી બાજુએ એક ક
બિંદુ લો. અવમાં ગમે / ગ
તે હ બિંદુ લો. કહ
સાંધો. પછી નીચેના ઈ
ત્રણ પ્રયોગ જુદી જુદી
આકૃતિ દોરીને કરો:— અ હ વ

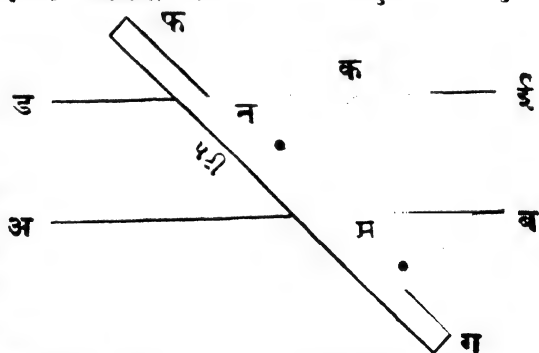
(૧) ∠કહવ જેવડો ∠હકઈ લઈને ઈકફ
લીટી દોરો.

(૨) ∠કહવના ન્યૂનતાપૂરક ખુણા જેવડો ∠હકફ
દોરો, અને ફકને ઈ સુધી વધારો.

(૩) હકને ક તરફ ગ સુધી વધારો. ∠કહવ
બરાબર ∠ગકફ કરો, અને ફકને ઈ સુધી વધારો.

(૨) અને (૩) એ આકૃતિઓમાં વ્યુત્ક્રમખુણા બરા-
બર છે, અને ઈફ, અવને સમાંતર છે, એ બતાવી આપો.

બીજી રીત:—અવફ લીટી પર ત્રિકોણમાપનો કણ
બરાબર પડે
એવી રીતે તે
ત્રિકોણમાપ હ
મૂકવું. ત્રિ-
કોણમાપની
બીજી બાજુ-અ
ને (એટલે
કાટખુણો ક-



રનારી બે બાજુમાંથી એક બાજુને) આકૃતિમાં બતાવ્યા
પ્રમાણે પટ્ટી લગાડવી. પછી પટ્ટીને દાબી રાખીને પટ્ટીની
કોરે કોરે ત્રિકોણમાપને ઉપલી બાજુએ ખસેડવું. ક બિંદુ પર
ત્રિકોણમાપનો કણ આવ્યો, કે કણની કોરે કોરે ક બિંદુમાં
થઈને જાય એવી લીટી દોરવી.

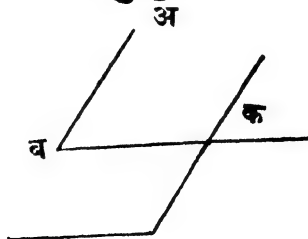
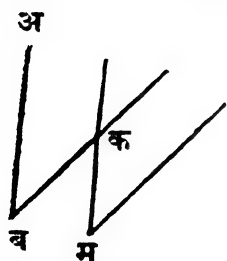
ધારો કે એવી રીતે ડાઈ લીટી ક બિંદુમાં થઈને જાય એમ અબને સમાંતર દોરેલી છે, તો તે સમાંતર છે એ વાત નીચે પ્રમાણે સિદ્ધ થઈ શકે. અબ, ડકાઈ એ લીટીઓને છેદનારી ફગ લીટીથી થનારા ન અને મ સંગતખુણા સરખા છે; માટે ડકાઈ લીટી અબને સમાંતર છે.

એક અબ લીટી લો. અબને સમાંતર કડ લીટી દોરો. કડને સમાંતર ર્ફ લીટી દોરો. ર્ફ, અબને સમાંતર છે કે ? આ ઉપરથી, જે એ લીટીઓ ત્રીજીને સમાંતર હોય છે, તેમના સમાંતરપણા વિષે શો નિયમ જણાઈ આવે છે ? “તેઓ એક બીજીને સમાંતર હોય છે.”

એક બીજીને સમાંતર ઘણી લીટીઓ દોરવાની રીત:—જે દિશામાં સમાંતર લીટીઓ દોરવી હોય, તે દિશામાં ત્રિકોણમાપનો એક ભુજ* મૂકીને તેની લગોલગ લીટી દોરવી. (એક આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી કાઢવી હોય તો તે લીટી પર ત્રિકોણમાપનો ભુજ મૂકવો.) પછી બીજી પટ્ટી કે ત્રિકોણમાપ લઈને, તેની એક બાજુ પહેલા ત્રિકોણમાપના કાટખુણાના બીજા ભુજને લગાડવી. પછી પહેલા ત્રિકોણમાપને ઉપર કે નીચે જરૂર પ્રમાણે પટ્ટીની કે બીજા ત્રિકોણમાપની કોરે કોરે ખસેડીને સમાંતર લીટીઓ દોરવી.

એક ઉભી લીટી લો. તેમાં ગમે ત્યાં ચાર પાંચ બિંદુ લો, અને તે બિંદુઓમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટીઓ દોરો.

સમાંતર ભુજેવાળા ખુણા.



* કાટખુણો કરનારી બે બાજુઓને ભુજ કહે છે.

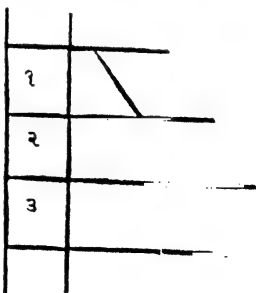
એક અલ્પક ખુણા લો. અને તે એક મ બિંદુ લો. મ-
માંથી વાજ, વાજને સમાંતર લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓની
વચ્ચેનો ખુણા માપો. તેને અલ્પક સાથે સરખાવો. તે
/ અલ્પક જેવડો ન હોય તો તેને / અલ્પક માં ઉમેરો,
અને એનો સરવાળો કેટલો થાય છે તે જુઓ. •

આ ઉપરથી કોઈ ખુણા અને તેના ભુજાને સમાંતર હોય
એવી લીટીઓ વચ્ચેનો ખુણા એ એની વચ્ચેના સંબંધ વિષે
શો નિયમ જણાઈ આવે છે ? “ આ ખુણા સરખા હોય
છે અથવા ન્યૂનતાપૂરક હોય છે. ” (ખુણા ક્યારે સરખા
છે અને ક્યારે ન્યૂનતાપૂરક હોય છે એનો ખુલાસો આગળ
૬૮ પ્રમેયની નીચે કર્યો છે.)

સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના ગાળાઓ.

એક ઉભી લીટી લો. તેમાં સરખે અંતરે ત્રણ કે ચાર બિંદુઓ
લો, અને તેમાં થઈને જાય એવી સમાંતર લીટીઓ દોરો.
આ બધી સમાંતર લીટીઓને છેદે એવી બીજી ચાર પાંચ
લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓ પૈકી પહેલી લીટીના, સમાંતર
લીટીઓને લીધે, જે બે કે ત્રણ ગાળાઓ પડે છે, તેમને એક

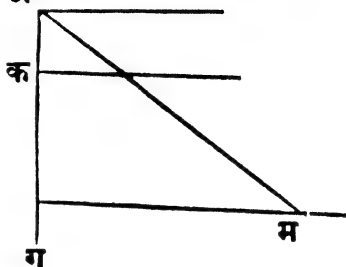
બીજા સાથે સરખાવો. શું
જણાઈ આવે છે ? “ ગાળા-
ઓ સરખા છે. ” એવીજ
રીતે બીજી લીટીના ગાળાઓ
સરખાવીને શું જણાય છે
તે જુઓ. “ ગાળાઓ
સરખા છે. ” ત્રીજી અને
ચોથી લીટી માટે એવાજ



પ્રયોગ કરો. (પુ.૦.) આ ઉપરથી કયો નિયમ જણાઈ આવે
છે ? “જો ત્રણ કે ત્રણથી વધારે સમાંતર લીટીઓને

છેદનારી એક લીટીના ગાળાઓ સરખા હોય, તે તે સમાંતર લીટીઓને છેદનારી બીજી ગમે તે લીટીના ગાળાઓ સરખા હોય છે, ”

અગ અને અમ લીટીઓ ગમે તેવડો ખુણો કરે એમ દોરો. અગ લીટીમાં અથી અ થોડે અંતરે ક બિંદુ લો; અકથી બમણે અંતરે બ બિંદુ લો; અ, ક, બ, બિંદુમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટીઓ દોરો.



આ લીટીઓને લીધે અમના જે બે ગાળા પડે છે તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. શું જણાઈ આવે છે ? ઉપલી આકૃતિમાં સમાંતર લીટીઓને છેદનારી ગમે તે લીટી દોરો. તેના સમાંતર લીટીઓને લીધે જે ગાળા પડે છે તેમને સરખાવો. શું જણાઈ આવે છે ?

અગ લીટીમાં કબ અંતર અકથી ત્રણગણું લો, અને ઉપર પ્રમાણેજ પ્રયોગ કરો. આ પ્રયોગ પરથી શું સમજાય છે ?

સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર.

બે સમાંતર લીટી દોરો. તે બે વચ્ચે ઓછામાં ઓછું અંતર દેખાડનારી લીટી દોરો. આ લીટી સમાંતર લીટીઓ પૈકી દરેક લીટી સાથે કેવડો ખુણો કરે છે ?

આ ઉપરથી સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર (ઓછામાં ઓછું અંતર) કાઢવા વિષે શો નિયમ સમજાય છે ? “સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર તેમની વચ્ચેનો લંબ છે.”

એક્સસર્સાઈઝ પુસ્તકમાંની સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર મિલિમીટરમાં કાઢો.

એ સમાંતર લીટીઓ દોરો. તેમાંથી એક પર લંબ દોરો. તે લંબને બીજી લીટીને છેદતાં સુધી લંબાવો. તે બીજી લીટી પર લંબ છે કે ? “ હા. ” આ ઉપરથી શું સમજાય છે ? “ એ સમાંતર લીટી પૈકી એક લીટી પર લંબ હોય એવી લીટી બીજી લીટી પર પણ લંબ હોય છે. ”

ત્રિકોણ.

વર્તુળ.

ચાકની લાકડી ખોસવાના લાકડાના કંપાસની બે અણી વચ્ચે એક કુટ અંતર રાખવું. પાટીઆ પર એક બિંદુ લઈને તેને આ નામ આપવું. અંદાજે બિંદુ પર કંપાસની તીક્ષ્ણ અણી મૂકીને ચાકની અણીથી પાટીઆ પર એક બિંદુ કાઢવું. અથવા આ બિંદુનું અંતર કેટલું છે ? “ એક કુટ. ” પછી તીક્ષ્ણ અણી કાયમ રાખીને (બંને અણીઓની વચ્ચેનું અંતર તેનું તેજ રાખીને) ચાકની અણી જરા (ગોળાટમાં) આગળ ખસેડીને બીજું બિંદુ કાઢવું. અથવા આ બિંદુનું અંતર કેટલું છે ? “ એક કુટ. ” એજ પ્રમાણે ચાકની અણી ગોળાટમાં ખસેડીને ટપકાંની લીટીથી વર્તુળ બનાવવું; અને કાઢેલાં ટપકાંનું અંતર અથવા સરખુંજ છે (એટલે એક કુટ છે) એ જવાબ છોકરાઓની પાસે કઢાવવો. પછી કંપાસ ફરીથી પાટીઆ પર મૂકીને ટપકાં પર થઈ જાય એવી રીતે ચાકની અણી ફેરવીને વર્તુળ પુરું કરવું. (વર્તુળના પરિધ પરનું એકાદ બિંદુ બતાવીને) “ આનું અથવા અંતર કેટલું છે ? ” “ એક કુટ. ” (પરિધ પરનું બીજું કોઈ બિંદુ દેખાડીને) આનું અંતર અથવા કેટલું છે ? “ એક કુટ. ” આ લીટી-

માંના કોઈ પણ બિંદુનું અંતર અથી એક ફુટ છે, એ વાત પરથી વર્તુળના પરિધ પરના બિંદુ અને મધ્યબિંદુ વચ્ચેના અંતર વિષે કયો નિયમ જણાઈ આવે છે ? “ પરિધ પરનાં સર્વ બિંદુઓ મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે હોય છે. ” તેટલાજ અંતર પરનું (એટલે એક ફુટ અંતરે હોય એવું) બિંદુ પરિધની અંદર કે બહાર હોવાનો સંભવ છે કે ? “ ના. ”

ગોળ આંકણીની આસપાસ બરાબર એક ફેરો થતા સુધી દોરો લપેટો, અને જ્યાં એક ફેરો પુરો થાય ત્યાંથી દોરો કાપી કાઢો. પછી કાપેલા દોરાનો કકડો માપો. (અથવા ગોળ આંકણીની બાજુ પર કંઈ નિશાની કરીને તે આંકણીની એક પ્રદક્ષિણા થાય ત્યાંસુધી તે આંકણીને ફુટપટ્ટી પર ફેરવો, અને ફુટપટ્ટી પરનું અંતર માપો. પછી તે આંકણીનો વ્યાસ માપો. આંકણીના વ્યાસ અને પરિધ વચ્ચે શું પ્રમાણ હોવાનું જણાઈ આવે છે ?)

ભોંય પર પૈસો મૂકી તેની આસપાસ દોરો લપેટીને ઉપર પ્રમાણે પ્રયોગ કરો.

બે ઈંચ વ્યાસનું વર્તુળ કાઢો. પાણીમાં દોરો પલાળીને તેને વર્તુળના પરિધ પર મૂકી પરિધની લંબાઈ માપો. પરિધ વ્યાસથી કેટલાગણો મોટો છે તે જુઓ.

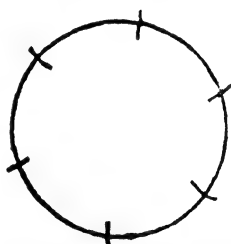
૩.૫”, ૭” વ્યાસનાં વર્તુળ લઈને ઉપરોક્ત પ્રયોગ કરો. વ્યાસથી પરિધ કેટલાગણો મોટો હોય છે એ વિષે તમને શું જણાઈ આવે છે ? “ ૩ઠ્ઠે ગણો, અથવા વ્યાસ અને પરિધનું પ્રમાણ ૭:૨૨ હોય છે. ”

કાગળના કકડા પર એક વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળના પરિધ પર અ,બ,ક,ડ,ઈ,ફ,ગ...એ બિંદુઓ ઘણાં પાસપાસે લઈને તેમાં ટાંકણીઓ ખોસો. અ આગળ શરૂ કરીને ફરીથી અ સુધી આવી પહોંચે ત્યાં લગી ટાંકણીઓની આસપાસ

દોરો લપેટો, અને તે બિંદુ આગળ દોરો કાપી કાઢો. આ દોરાની લંબાઈ લગભગ વર્તુળના પરિધ જેટલી છે, એમ જણાશે. આ લંબાઈ વર્તુળની ત્રિજ્યાથી કેટલાગણી છે ? “ સવાછગણી છે. ”

ઉપલા પ્રયોગ પરથી એમ જણાઈ આવશે, કે અબ અંતર જેમ જેમ ઓછું લઈએ તેમ તેમ દોરો અબ કૌંસની વધારે ને વધારે પાસે થઈને જાય છે. આ પરથી એમ જણાઈ આવે છે, કે વર્તુળમાં દોરેલી ઘણી બાબતોવાળી આકૃતિની બાબતો જો ઘણીજ નાની હોય, તો તે આકૃતિની પરિમિતિ લગભગ વર્તુળના પરિધ જેટલી હોય છે.

ગમે તેવું એક વર્તુળ દોરો. તે વર્તુળની ત્રિજ્યા જેટલું અંતર કંપાસની અણીઓની વચ્ચે રાખીને કંપાસની અણીઓ પરિધ પર મૂકીને પરિધના થાય તેટલા સરખા ભાગ કરો. કેટલા ભાગ થયા ? “ છ. ”



ત્રિજ્યા જેટલી લાંબી જ્યાઓ* વર્તુળમાં એક પુરી થાય ત્યાં બીજી શરૂ થાય એવી રીતે એક પછી એક મૂકી હોય તો તેવી જ્યાઓ એક પુરી પ્રદક્ષિણા થાય ત્યાંસુધી, એક વર્તુળમાં કેટલી કાઢી શકાય ? “ છ. ”

વર્તુળ અને ત્રિકોણ.

૨" ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ કાઢો. ૨" વ્યાસવાળું વર્તુળ કાઢો. ૨.૬" ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. ૨૨ મિ. મી. ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો.

* પરિધ પરનાં કોઈ પણ બે બિંદુને સાંધનારી લીટીને જ્યા કહે છે.

અ સ્થળે રાખેલી તોપનો ગોળો ચાર માઇલ સુધી જાય છે, તો તે તોપના ગોળાની મર્યાદામાં આવતા પ્રદેશની હદ દેખાડો. (સ્કેલ-૧ માઇલ=૧").

બે કિલ્લા વચ્ચે ૯ માઇલનું અંતર છે. દરેક કિલ્લા પરની તોપનો મારો ૭ માઇલ સુધી પહોંચે છે; તો બંને કિલ્લા પરની તોપના મારામાં જે સામાન્ય પ્રદેશ આવે છે તેની હદ દેખાડો. (સ્કેલ-૫ મિ. મી = ૧ માઇલ.)

એક વર્તુળાકાર બાગનો વ્યાસ ૫૦ ફુટ છે. એક માળી તે બાગની કોર પર હાથમાં પાણીની નળી લઈને ઉભો છે. જો નળીમાંથી પાણી ૩૦ ફુટ આધું ઊડી શકે, તો જ્યાં માળી ઉભો રહ્યો છે તે જગા પરથી તે બાગનો કેટલો ભાગ પલાળી શકશે, એ આકૃતિ કાઢીને બતાવો. (સ્કેલ-૧ મિ. મી = ૧ ફુટ.)

એક બીજથી ૧.૫" અંતરે અ અને બ બિંદુઓ લો. અથી ૧.૫" અંતરે હોય એવાં બધાં બિંદુઓની જગા એક લીટીથી બતાવો. (આ લીટી, ૧.૫" ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ થશે.) બથી ૧.૫" અંતરે હોય એવા તમામ બિંદુઓની જગા લીટીથી બતાવો. અ ને બ એ બંને બિંદુથી ૧.૫" અંતરે કેટલાં બિંદુ છે? “બે.” તેમને ક ને ડ કહો. તેમને અ,બ સાથે સાંધો. અબ,બક,કઅ અને અબ,બડ, ડઅ લીટીઓની લંબાઈ કેટલી છે?

અ ને બ એ બે બિંદુઓ એક બીજથી ૧.૭" આધાં છે. અથી ૨" દૂર હોય એવાં બધાં બિંદુઓની જગાઓ બતાવો. બથી ૧.૫" અંતરે હોય એવાં તમામ બિંદુઓની જગા લીટીથી દેખાડો. અથી ૨" અને બથી ૧.૫" આધું કયું બિંદુ છે? એવાં બિંદુઓ બધાં મળીને કેટલાં છે? “બે.” તેમને ક ને ડ કહો. અક અને બકની લંબાઈ કેટલી છે? તેમજ અડ અને બડની લંબાઈ કેટલી છે?

ઉપલા પ્રયોગ પરથી, આપેલાં બે બિંદુથી અમુક અંતરે હોય એવું બિંદુ કાઢવાની કઈ રીત જણાઈ આવે છે ? (અર્થાત્ બે બિંદુથી અમુક અંતરે હોય એવું બિંદુ કાઢવું હોય તો તે કેમ કાઢવું ?) આ બિંદુઓ સાંધવાથી જે આકૃતિ થાય છે, તેને કેટલી બાજુઓ હોય છે ? કેટલા ખુણા ?

અ,બ બિંદુઓ એક બીજાથી ૧.૨" અંતરે છે. અથી ૨" અને વથી ૧.૬" અંતરે હોય એવું ક બિંદુ શોધી કાઢો. અ,બ,ક,અ ક એ બિંદુઓ સાંધો. અ,બ,ક,અની લંબાઈ કેટલી ? અ,બ,ક એ કઈ આકૃતિ છે ?

ઉપલા પ્રયોગ પરથી, જેની અ,બ,ક,અ બાજુઓની લંબાઈ આપેલી હોય, એવો ત્રિકોણ દોરવા વિષે કયો નિયમ નીકળે છે ?

ઉપલા પ્રયોગમાંની આકૃતિમાંના અ,બ,ક અને અ,બ,ક ત્રિકોણમાં કંઈ સરખાપણું હોવાનું જણાઈ આવે છે કે ?

નીચે આપેલાં માપ ઉપરથી ત્રિકોણ કાઢો:—

અ,બ	૧.૪"	બ,ક	૨"	ક,અ	૨.૫"
,,	૨.૧"	,,	૧.૮"	,,	૩.૨"
,,	૪.૧"	,,	૪.૨"	,,	૪.૩"
,,	૪૧ મિ. મી.	,,	૪૨ મિ. મી.	,,	૪૩ મિ. મી.
,,	૩૨	,,	૧૮	,,	૨૦
,,	૬૯	,,	૧૧૪	,,	૫૮

(કેટલીક) વ્યાખ્યાઓ.

ત્રિકોણ જે બાજુ પર ઉભો છે એમ આપણે ધારીએ છીએ, તે બાજુ તેનો પાયો કહેવાય છે. અ,બ,ક ત્રિકોણ

અ,બ બાજુ પર છે એમ ધાર્યું

હોય, તો અ,બ તેનો પાયો થાય;

પણ તે બ,ક પર ઉભો છે એમ ધાર્યું

હોય તો બ,ક તેનો પાયો થાય.

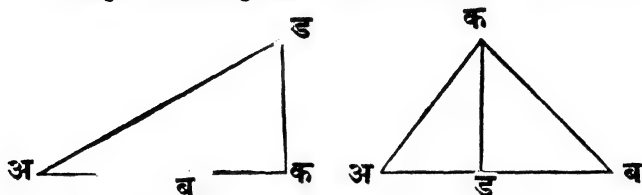
અ

ક

બ

ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો કહે છે.

ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલા લંબને તેની



ઉંચાઈ કહે છે. પાસેના ત્રિકોણમાં કડ, અવક ત્રિકોણની ઉંચાઈ છે.

ત્રિકોણની બાજુઓ સરખી હોય કે ન હોય, તે પરથી ત્રિકોણના કેટલા પ્રકાર થઈ શકે ?

- “ (૧) જેમની બધી બાજુઓ સરખી હોય એવા;
 (૨) જેમની ફક્ત બે બાજુઓ સરખી હોય એવા;
 (૩) જેમની કોઈ પણ બાજુઓ સરખી ન હોય એવા.”

(જેમની એકજ બાજુ સરખી હોય એવા ત્રિકોણ હોઈ શકે ? એવો કોઈ પ્રકાર છે એમ ધારવામાં શી ભૂલ થશે ?)

જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ સરખી હોય તેને સમબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.

જે ત્રિકોણની બે બાજુ સરખી હોય તેને સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.

દરેક સમબાજુ ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે, પરંતુ દરેક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ સમબાજુ હોતો નથી.

જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુ અસમાન એટલે વિષમ હોય તેને વિષમબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.

કેટલાક સમબાજુ, કેટલાક સમદ્વિબાજુ, અને કેટલાક વિષમબાજુ ત્રિકોણ, પ્રથમ વિભાજક અને પટ્ટીની મદદથી અને પછી તેમની મદદ સિવાય (એટલે એકલા હાથે) દોરો.

ત્રિકોણના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો.

ગમે તેવો એક ત્રિકોણ કાઢો. તેના ત્રણે ખુણાને નિશાની કરીને તેમને ચપ્પુથી કાપી કાઢો, અને તેમને એક ખીજની લગોલગ મૂકો. તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ?

ગમે તેવો ત્રિકોણ કાઢો. તેના ત્રણે ખુણા કોણમાપકથી માપો. તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ? આ ઉપરથી ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે શો નિયમ જણાઈ આવે છે ? “ત્રિકોણના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થાય છે.”

ત્રિકોણના અંદરના બધા ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ બતાવવા માટે નીચેનો પ્રયોગ કરવો.

અબક એક ત્રિકોણ છે એમ ધારો. હાઈ એક પેન્સિલ છે, અને તેની ઈ

આણી બ તરફ છે.

આ પેન્સિલને અબ

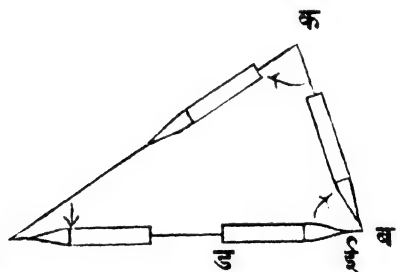
બાબુમાં બ સુધી

ખસેડો. તે બિંદુ

આગળ હ છેડાને

અબક ખુણા જે-

અ



ટલો ફેરવીને ઈંડ, બક પર પડે એમ કરો. પછી પેન્સિલને ક તરફ ખસેડો; અને હ છેડો કને અડકે, એટલે ઈ છેડાને બકઅ ખુણા જેટલો ફેરવો. પછી પેન્સિલને અ તરફ ખસેડો; અને ઈ છેડો અને અડકે, એટલે હ છેડાને કઅબ ખુણા જેટલો ફેરવો. પેન્સિલને અબ લીટીમાં ખસેડીને પ્રથમને સ્થળે લાવો. હવે પેન્સિલની ઈ આણી કઈ દિશામાં છે ? “ અ

તરફ. ” પહેલાં કઈ દિશામાં હતી ? “ ચ તરફ. ” આ પરથી રૂં આણી પ્રથમ હતી તેની વિરુદ્ધ દિશામાં ગઈ છે એમ જણાઈ આવે છે. આણીની દિશા બદલતી વખતે પેન્સિલ કેવી રીતે ફરતી ગઈ એ ધ્યાનમાં લો, અને તે પરથી હાઈ પેન્સિલ કેટલા કાટખુણામાં થઈને ફરી તે કહો. “ તે બે કાટખુણામાં થઈને ફરી છે. ” અર્થાત્ ત્રિકોણના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર છે, એમ આથી સિદ્ધ થાય છે.

પ્રશ્ન.

બે ત્રિકોણના બે ખુણા નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તો ત્રીજો ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ તે કહો:—

૧૦૦°, ૫૦°; ૭૦°, ૪૦°; ૧૧૨°, ૧૮°; ૩૦°, ૪૦°.

જે ત્રિકોણના બન્ને ખુણા સરખા હોય, અને જેમનો ત્રીજો ખુણો નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તેમના બાકીના ખુણા કેવડા હોવા જોઈએ ?:—

૪૦°, ૫૬°, ૧૦°, ૧૫°, ૮૫°.

ઉપલી સંખ્યાઓ ત્રિકોણના બે સરખા ખુણામાંનો એક ખુણો દર્શાવે છે, એમ ધારીને ઉપલા પ્રશ્નનો ઉત્તર આપવાનો પ્રયત્ન કરો.

જેના સઘળા ખુણા સરખા છે, એવા ત્રિકોણનો દરેક ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ ?

નીચે આપેલા અંશના ખુણાવાળા ત્રિકોણ કાઢી શકાશે કે ?

(૧) ૯૦°, ૬૦°, ૩૦°. (૨) ૭૭°, ૮૪°, ૨૦°.

(૩) ૫૯°, ૬૦°, ૬૧°. (૪) ૧૩૫°, ૨૨°, ૨૨°.

(૫) ૭૩°, ૭૩°, ૩૩°. (૬) ૫૪°, ૫૪°, ૭૨°.

જે ત્રિકોણ કાઢી શકાય એવા ન હોય તેમના સંબંધમાં કારણ આપો.

જેનો ત્રિકોણ બની ન શકે, એવા ત્રણ ત્રણ ખુણાના કેટલાક સટ અથવા સમુદાય આપો.

એક સીધી લીટીને બંને છેડે કાટખુણો કરનારી લીટીઓ દોરીએ, તો તે ત્રણ લીટીઓનો ત્રિકોણ બનશે કે ?

એક સીધી લીટીના બંને છેડા આગળ પહોળા ખુણો કરનારી લીટીઓ દોરીને પહોળા ખુણાની બાજુએ ત્રિકોણ બનાવી શકાય કે ?

જેમના ત્રણ ખુણા અનુક્રમે નીચે આપેલા પ્રકારના છે, એવા ત્રિકોણ દોરવાને તમને કલ્પું છે. એ પૈકી કયા ત્રિકોણો કાઢી શકાશે તે કહો:—

પહેલો ખુણો.	બીજો ખુણો.	ત્રીજો ખુણો.
(૧) કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૨) કાટખુણો,	કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૩) સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૪) પહોળો ખુણો,	પહોળો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૫) પહોળો ખુણો,	કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૬) પહોળો ખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.

વ્યાખ્યા.

ત્રિકોણના ખુણા પૈકી કેટલા ખુણા કાટખુણા અથવા પહોળા ખુણા હોઈ શકે ? “ એક ત્રિકોણમાં એકથી વધારે કાટખુણા હોઈ શકતા નથી ”; તેથી—

(૧) ત્રિકોણનો એક ખુણો કાટખુણો હોય, તો તે ત્રિકોણને કાટખુણ ત્રિકોણ કહે છે.

ત્રિકોણમાં એકથી વધારે પહોળા ખુણા હોઈ શકતા નથી, તેથી—

(૨) ત્રિકોણનો એક ખુણો પહોળો ખુણો હોય, તો તે ત્રિકોણને પહોળાખુણ ત્રિકોણ કહે છે.

કોઈ પણ ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા કેટલા સાંકડા ખુણા હોવાનું જોઈએ ? “ બે. ”

હવે કેવા ત્રિકોણને સાંકડાખુણ ત્રિકોણ કહેવો જોઈએ ?

કોઈ પણ ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા બે સાંકડા ખુણા હોવા જોઈએ, એમ ઉપર કહ્યું છે; ત્યારે જે ત્રિકોણમાં બેજ ખુણા સાંકડા ખુણા હોય, તેને સાંકડખુણ ત્રિકોણ કહીએ તો ચાલે કે? એમ કહેવામાં શી ભૂલ થશે? ઉપર કહેલા ત્રિકોણોના વર્ગોમાંથી કયા વર્ગના ત્રિકોણનો એ નામમાં ખોટી રીતે સમાવેશ થશે? જે ત્રિકોણને કાટખુણ ત્રિકોણ અથવા પહોળખુણ ત્રિકોણ એ બેમાંથી એકે નામ ન અપાતાં ફક્ત સાંકડખુણ ત્રિકોણ એજ નામ આપી શકાય, એવા ત્રિકોણમાં સાંકડા ખુણા કેટલા હોવા જોઈએ? “ત્રણ.” આ પરથી સાંકડખુણ ત્રિકોણની વ્યાખ્યા તમે શી આપશો?

(૩) જે ત્રિકોણના ત્રણે ખુણા સાંકડા હોય છે, તેને સાંકડખુણ ત્રિકોણ કહે છે.

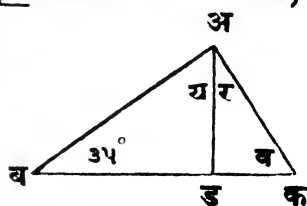
૭૩મા અને ૭૪મા પાના પર આપેલા ત્રિકોણ જુઓ, અને તે પૈકી દરેક ત્રિકોણ, ઉપર કહેલા ત્રણ પ્રકાર પૈકી કયા પ્રકારનો છે તે કહો.

એક કાટખુણ ત્રિકોણનો એક ખુણો નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તો બાકીના ખુણા કેવડા હોય તે કહો:—

80° , 40° , 63° , 97° , 54° , 26° , 32° વગેરે.

ઉપલા પ્રશ્ન પરથી, કાટખુણ ત્રિકોણના સાંકડા ખુણાના સરવાળાના સંબંધમાં કયો નિયમ સમજાય છે? “તેમનો સરવાળો એક કાટખુણો થાય છે, એટલે કાટખુણ ત્રિકોણમાંના સાંકડા ખુણા એક બીજના કોટિખુણા હોય છે.”

પાસેના અબક ત્રિકોણમાં \angle અબક $= 40^\circ$ અને અડ, વક પર લંબ છે. જો \angle અ $= 34^\circ$ હોય, તો \angle ચ, \angle ર, \angle વ કેવડા હોવા જોઈએ?



ઉપલા પ્રશ્નમાં \angle બ નીચે આપેલા અંશનો છે, એમ ધારીને \angle ચ, \angle ર, \angle વ ખુલા કાઢો:—

૩૦°, ૨૫°, ૩૭°, ૪૫°, ૫૩°.

ત્રિકોણના બહારના ખુલા.

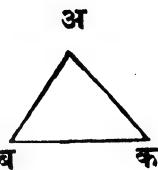
એક અબક ત્રિકોણ લો. તેની ગમે તે બાજુ (દાખલા તરીકે બક)ને ડ સુધી વધારો. અકડ ખુલાને અબક ત્રિકોણનો બહારનો ખુલો કહે છે. ત્રિકોણની બધી બાજુઓ બંને છેડા તરફ વધારી હોય, તો છ બહારના ખુલા થાય છે. પણ એવી રીતે જે ખુલા થાય છે, તેમાંથી ત્રિકોણના દરેક શિરોબિંદુ આગળ જે સામસામા બમ્મે ખુલા થાય છે, તે એક બીજાની બરાબર હોય છે; માટે આ બેડ-માંના ગમે તે એક ખુલાને તે શિરોબિંદુ આગળનો બહારનો ખુલો ગણવાનો રિવાજ છે. તે છતાં પણ કોઈ ત્રિકોણના બહારના ખુલા એટલે ક્યા ખુલા સમજવા, એ વિષે શક ન પડે, એટલા માટે ત્રિકોણના બહારના ખુલા વિષે નીચેનો સંકેત નક્કી કરેલો છે:—

કોઈ ત્રિકોણની બાજુઓને એકજ ક્રમે વધારી હોય, તો તે બાજુઓ આગળ થતા બહારના ખુલાઓને તે ત્રિકોણના બહારના ખુલા કહે છે. દાખલા તરીકે, ૮૧મા પાના ઉપરની આકૃતિમાં અકઈ, બઅફ, અને કબગ એ અબક ત્રિકોણના બહારના ખુલા છે.

ત્રિકોણના અંદરના ત્રણ ખુલાનો સરવાળો જ્યારે બે કાટ-ખુલા બરાબર થાય છે, ત્યારે તે ત્રણ પૈકી બે ખુલાનો ન્યૂનતાપૂરક ખુલો કયો? “ત્રીજો ખુલો.”

પાસેની આકૃતિમાં (\angle બઅક+ \angle અકબ)નો ન્યૂનતા-

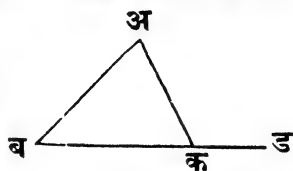
પૂરક ખુણો કયો ? (\angle અકબ+
 \angle કબઅ)નો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયો ?
 \angle કબઅના ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયા ?



\angle બઅકના કયા ? \angle અકબના કયા ?
 ગમે તે એક અકબ ત્રિકોણ દોરો. બક બાબુને ડ સુધી
 લંબાવો. \angle અકબ+ \angle અકડ

=૨ કાટખુણા, તો \angle અકબ-
 નો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયો ?

“ \angle અકડ.” આગલા પ્ર-



યોગ પરથી ત્રિકોણના ખુણા પૈકી કયા ખુણા \angle અકબના
 ન્યૂનતાપૂરક છે એમ જણાય છે ? “ \angle કબઅ+ \angle બઅક.”
 આ પરથી \angle કબઅ, \angle બઅક એમનો સરવાળો અને
 \angle અકડ એ બેની વચ્ચે તમને શો સંબંધ જણાય છે ?

આ પરથી ત્રિકોણનો બહારનો ખુણો અને બહારના
 ખુણાની પાસેના અંદરના ખુણા સિવાયના બાકીના અંદરના
 બે ખુણાનો સરવાળો, એમની વચ્ચે તમને શો સંબંધ
 જણાય છે ?

“ત્રિકોણનો કોઈ પણ બહારનો ખુણો, તેની
 લગોલગ ન હોય એવા અંદરના બે ખુણાના સર-
 વાળા બરાબર હોય છે.”

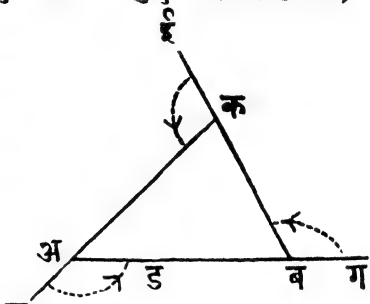
ત્રિકોણના બહારના ખુણાઓનો સરવાળો.

ત્રિકોણની ત્રણ બાબુઓ એક તરફથી વધારી હોય,
 તો જે બહારના ખુણા થાય છે તે માપો, અથવા તેમને
 કાપી કાઢીને પાસપાસે મૂકો, અને તેમનો સરવાળો કરો. તે
 કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ? “ચાર.”

ત્રિકોણમાંના દરેક ખુણો અને તેની પાસેનો બહારનો ખુણો
 એ બેનો સરવાળો કેટલો થાય છે ? “બે કાટખુણા.” એ
 પ્રમાણે ત્રિકોણની અંદરના ત્રણ ખુણા અને તેમની પાસેના

બહારના ત્રણ ખુણા, એ બધાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે ? “છ.” ત્રિકોણના અંદરના ત્રણ ખુણા મળીને બ્યારે એ કાટખુણા બરાબર હોય છે, ત્યારે આ પરથી બહારના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો કેટલો હોવો જોઈએ, એ વિષે તમે કંઈ અનુમાન કરી શકો છો ? “એ સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોવો જોઈએ.”

ત્રિકોણના બહારના ખુણા ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ સિદ્ધ કરવા માટે નીચેનો પ્રયોગ કરવો. ધારો કે અબ,બક,કઅ એ ત્રણ રસ્તાથી એક ત્રિકોણ બને છે. હ સ્થળથી એક ગાડી બ તરફ જવા નીકળે છે. આ ગાડી



બ પાસે આવશે, એટલે બક રસ્તે જવા માટે તેને પોતાનું મોટું ટપકાંથી દેખાડેલા બ ખુણા જોટલું ફેરવવું પડશે. ગાડી ક પાસે જશે ત્યારે ટપકાંથી દેખાડેલા ક ખુણા જોટલું તેને પોતાનું મોટું ફેરવવું પડશે. ગાડી કઅ રસ્તે અ પાસે ગયા પછી ત્યાં તેને ટપકાંથી દર્શાવેલા અ ખુણા જોટલું મોં ફેરવવું પડશે. હવે જો ગાડી સીધી આગળ જશે તો તે હ બિંદુ પાસે જઈ પહોંચશે.

ધારો કે બઅ લીટી બરાબર પૂર્વપશ્ચિમ છે. આ પરથી સ્પષ્ટ જણાય છે, કે ગાડી પ્રથમ નીકળી ત્યારે તેનું મોં પૂર્વ તરફ હતું. તે બ પાસે ગઈ ત્યારે તેનું મોં ઉત્તર તરફ ફર્યું. તે ક પાસે ગઈ ત્યારે.....વગેરે. એ પ્રમાણે તેનું મોં ધીમે ધીમે ઉત્તર, પશ્ચિમ, દક્ષિણ, એ દિશા તરફ ફર્યું, અને આખરે પૂર્વ તરફ આવ્યું. આ ઉપરથી ગાડીના મોંએ એક પુરી

પ્રદક્ષિણા કર્યા જેવું થાય છે. પૂર્ણ પ્રદક્ષિણા કરી એટલે ચાર કાટખુણામાં થઈને કર્યા જેવું થાય છે (આ ઘડિઆળના કાંટાની મદદથી બતાવી શકાશે), માટે ગાડીનું મોં ચાર કાટખુણામાં થઈને ફર્યું છે, એમ માનવાને અડચણ નથી. ગાડીનું મોં જે ખુણામાં થઈને ફર્યું, તે ખુણા તો અબક ત્રિકોણના બહારના ખુણા છે. અબક ત્રિકોણ ગમે તે પ્રકારનો લીધો હોય, તોપણ ઉપર પ્રમાણેજ પરિણામ આવે છે. આ ઉપરથી ત્રિકોણના બહારના બધા ખુણા મળીને ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ સિદ્ધ થાય છે.

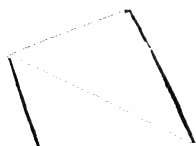
બહુકોણાકૃતિના બહારના ખુણાઓનો સરવાળો.

વ્યાખ્યા—ચારથી વધારે સીધી લીટીઓ વડે જેની હદ બંધાઈ હોય એવી કોઈ પણ આકૃતિને બહુકોણાકૃતિ કહે છે.

ચાર સીધી લીટીથી જેની હદ બંધાઈ હોય એવી આકૃતિને ચતુષ્કોણ કે ચોખુણું કહે છે.

પાંચ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને પંચકોણ કહે છે.

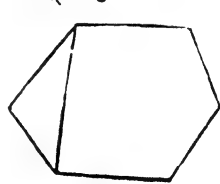
છ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને ષટ્કોણ કહે છે.



ચતુષ્કોણ.



પંચકોણ.



ષટ્કોણ.

સાત સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને સપ્તકોણ કહે છે.

આઠ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને અષ્ટકોણ કહે છે.

ગમે તેવો એક ચતુષ્કોણ લો. તેની બધી બાજુઓ એકજ

ક્રમે વધારો. એમ કરવાથી થએલા બધા બહારના ખુણા કાપીને અથવા કોણમાપક વડે માપીને તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ? “ ચાર. ”

એજ પ્રમાણે પંચકોણ, ષટ્કોણ, સપ્તકોણ, અષ્ટકોણ વગેરે આકૃતિઓ લઈને તેમના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો. તેમના બહારના ખુણાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે તમને કોઈ નિયમ જણાઈ આવે છે ? “ આ સર્વ આકૃતિઓના બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર થાય છે. ”

૮૧મા પાના પરના ત્રિકોણના સંબંધમાં કરેલા પ્રયોગ જેવો પ્રયોગ કરીને ચતુષ્કોણ, પંચકોણ, ષટ્કોણ વગેરેના બધા બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર થાય છે એ બતાવો.

બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો.

પહેલી રીત—ગમે તેવો એક ચતુષ્કોણ કાઢો. તેની બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારો. એક બાજુ વધારવાથી જે બહારનો ખુણો થાય છે, તે અને તેની પાસેનો આકૃતિનો અંદરનો ખુણો, એ બેનો સરવાળો કેટલો થાય છે ? “ બે કાટખુણા. ” એક બાજુ વધારવાથી જે બે ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો જ્યારે બે કાટખુણા બરાબર થાય છે, ત્યારે ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ વધારવાથી બનેલા બહારના અને અંદરના બધા ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે ? “ આકૃતિને જેટલી બાજુઓ છે તેટલીના બમણા કાટખુણા બરાબર. ” તેમાંથી બહારના ખુણાઓનો સરવાળો બાદ કરો. બાદબાકી રહી તે શાનો સરવાળો આવ્યો ? “ અંદરના ખુણાઓનો. ” તે કેટલો છે ? “ ચાર કાટખુણા. ”

એજ પ્રમાણે પંચકોણ, ષટ્કોણ વગેરેના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો.

પંચકોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો ?

$$(૫ \times ૨ = ૧૦; ૧૦ - ૪ = ૬)$$

ષટ્કોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો ?

$$(૬ \times ૨ = ૧૨; ૧૨ - ૪ = ૮)$$

સપ્તકોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો ?

$$(૭ \times ૨ = ૧૪; ૧૪ - ૪ = ૧૦)$$

પંદર બાજુવાળી આકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો.....વગેરે.

આ પરથી ગમે તે બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓના સરવાળા માટે શો નિયમ નીકળે છે ? “બાજુની બમણાઈ કરી તેમાંથી ચાર બાદ કરવા; બાદબાકી આવે તેટલા કાટખુણા સમજવા.”

કોઈ પણ બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે એ કાઢવાની બીજી રીત—

કોઈ પણ આકૃતિનો પહેલો અને ત્રીજો એ ખુણા સાંધવા, અને નીચેની રીતે ખુણાઓનો સરવાળો કરવો.

ચતુષ્કોણ = ૨ ત્રિકોણ; ખુણાનો સરવાળો = ૨ + ૨ કાટખુણા = ૪ કાટખુણા.

પંચકોણ = ત્રિકોણ + ચતુષ્કોણ; ખુણાનો સરવાળો = ૨ + ૪ કાટખુણા = ૬ કાટખુણા.

ષટ્કોણ = ત્રિકોણ + પંચકોણ; ખુણાઓનો સરવાળો = ૨ + ૬ કાટખુણા = ૮ કાટખુણા.

સપ્તકોણ = ત્રિકોણ + ષટ્કોણ; ખુણાઓનો સરવાળો = ૨ + ૮ કાટખુણા = ૧૦ કાટખુણા.

ત્રીજી રીત—ત્રિકોણની અંદરના બધા ખુણા મળીને એ કાટખુણા બરાબર હોય છે એ સિદ્ધ કરવા માટે પહેલાં

જે પેન્સિલનો પ્રયોગ કર્યો છે, તે ચતુષ્કોણ, પંચકોણ, ૫૨-કોણ, સપ્તકોણ વગેરે આકૃતિઓના સંબંધમાં કરો; અને પેન્સિલની અણીની પ્રદક્ષિણા કેટલી થાય છે તે જુઓ. આ પરથી બહુકોણાકૃતિના ખુણાના સરવાળાના સંબંધમાં ઉપર જે નિયમ આપ્યો છે તે સિદ્ધ થશે.

ચોથી રીત—આપેલી (જ્ઞ બાજુની) બહુકોણાકૃતિની અંદર એક અ બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી બહુકોણાકૃતિનાં શિરોબિંદુઓ સુધી લીટીઓ દોરો. એટલે બહુકોણાકૃતિને જેટલી બાજુ છે તેટલા (એટલે જ્ઞ) ત્રિકોણ થશે. તે ત્રિકોણોના ખુણાનો સરવાળો = જ્ઞ \times ૨ કાટખુણા. તેમાંથી અ બિંદુ પાસેના ખુણા = ૪ કાટખુણા. માટે બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાનો સરવાળો = (જ્ઞ \times ૨) - ૪ કાટખુણા છે.

પ્રશ્ન.

અવકાશ ચતુષ્કોણના \angle અ, \angle બ, \angle ક અનુક્રમે-

$\left. \begin{array}{l} ૪૫, ૫૫, ૧૦૦ \\ ૧૦૦, ૫૦, ૧૧૦ \\ ૧૨૦, ૧૦૦, ૧૨૦ \end{array} \right\}$ અંશના છે, તો \angle ડ કેટલા અંશનો?

એક ચતુષ્કોણના બે ખુણા ૧૦૦° અને ૪૦° છે, અને બાકીના ખુણા સરખા છે; તો તે કેટલા કેટલા અંશના છે ?

ઉપલા પ્રશ્નમાં પહેલા બે ખુણા અનુક્રમે ૫૩° અને ૨૭° , ૮૦° અને ૮૦° , ૧૧૦° અને ૨૮° ધારીને ઉત્તર આપો.

નિયમિત* પંચકોણનો દરેક ખુણો કેવડો હોય છે ?

નિયમિત ષટ્કોણનો કેવડો ? નિયમિત સપ્તકોણનો કેવડો ?

નિયમિત અષ્ટકોણનો કેવડો ?

* જે આકૃતિની બધી બાજુઓ સરખી અને બધા ખુણા સરખા હોય તેને નિયમિત આકૃતિ કહે છે.

નિયમિત પંચકોણ, પદ્મકોણ, અષ્ટકોણ, અને દશકોણનો બહારનો દરેક ખુણો કેટલા અંશનો હોય છે ?

એક ચતુષ્કોણના પાસપાસેના બે ખુણાનો સરવાળો ૧૬૦° છે, તો બાકીના બે ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો કેવડો છે ?

એક પંચકોણના ચાર ખુણા સરખા છે, અને પાંચમો ખુણો બાકીના દરેક ખુણાથી અર્ધો છે; તો તે ખુણો કેટલા અંશનો હોવો જોઈએ ?

અબકડઈફ પદ્મકોણમાંના અ,ક, અને ફ ખુણા સરખા છે, અને તેમાંનો દરેક ખુણો બ,ડ, કે ફ ખુણાથી બમણો છે (અર્થાત્ બ, ડ, અને ફ એક બીજાની બરાબર છે); તો અ ખુણો કેવડો છે ?

એક બહુકોણાકૃતિનો દરેક ખુણો $1\frac{3}{4}$ કાટખુણા બરાબર છે, તો તે આકૃતિને બાજુઓ કેટલી ? (બહારનો ખુણો કેવડો છે તે નક્કી કરી તે ઉપરથી બાજુઓની સંખ્યા નક્કી કરો.)

ત્રિકોણોની એકરૂપતા.*

(ત્રિકોણ એકરૂપ સિદ્ધ કરવા માટે કઈ શરતો જરૂરી છે એ વિશે.)

અબ અને ડઈ બે સરખી લીટીઓ લો. અબના બ બિંદુ પાસે ગમે તેટલો મોટો \angle અબક ખુણો કરો. \angle ડઈફ, \angle અબક જેવડો કરો. બક ગમે તેટલી લાંબી લો. તેટલીજ લાંબી ફિફ લો. કઅ, ફડ સાંધો. અબ, ડઈ પર અને બક, ફિફ પર પડે એવી રીતે અબક ત્રિકોણ ડઈફ ત્રિકોણ પર મૂકો. બંને ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે ? “છે.” (પુઠો). આ પરથી

* એકરૂપ એટલે બધી બાબતમાં સરખા. બધી બાબતો એટલે ખુણા, બાજુઓ, અને ક્ષેત્રફળ.

ત્રિકોણની એકરૂપતા વિષે ક્યો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ?

“એક ત્રિકોણની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેના ખુણા અનુક્રમે બીજાની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેના ખુણાની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

અब જેવડી ડર્ફ લીટી લો. \angle અબક, \angle બઅક ગમે તેટલા મોટા ખુણા લઈને અબક ત્રિકોણ પુરો કરો. \angle અબક, \angle બઅક જેવડા અનુક્રમે \angle ડર્ફ, \angle ઈડફ કરો. અબ, ડર્ફ પર અને બક, ઈફ પર પડે એવી રીતે અબક ત્રિકોણ ડર્ફ ત્રિકોણ પર મૂકો. (પૃ૦). તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે ? “છે.” આ ઉપરથી તમે ક્યો સામાન્ય નિયમ શીખ્યા ?

“એક ત્રિકોણની એક બાજુ અને તેના છેડાની પાસેના બે ખુણા અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની એક બાજુ અને તેના છેડાની પાસેના બે ખુણાની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

એક ગમે તેવો અબક ત્રિકોણ દોરો. ડર્ફ બાજુ અબ જેવડી દોરો. ડર્ફ ખુણો અબક ખુણા જેવડો કરો. અકબ ખુણા જેવડો કાગળનો કડકો કાપી કાઢો. આ ખુણો ઈફને લગાડીને એવી લીટી દોરો, કે તે ઈફની સાથે \angle અકબ જેવડો ખુણો કરે. એ લીટી ડમાં થઈને જશે. એવી રીતે ડર્ફ ત્રિકોણ દોર્યા પછી અબ, ડર્ફ પર અને બક, ઈફ પર પડે એવી રીતે અબક ત્રિકોણ ડર્ફ ત્રિકોણ પર મૂકો. બંને ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે ? “છે.” (પૃ૦). આ ઉપરથી તમે ક્યો સામાન્ય નિયમ શીખ્યા ?

“એક ત્રિકોણના બે ખુણા અને તેમાંના એકની સામેની બાજુ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના તેમને

મળતા ભાગોની (એટલે બીજના બે ખુણા અને પહેલા ત્રિકોણના જે ખુણાની સામેની બાજુ લીધી છે તે ખુણાની બરાબર બીજ ત્રિકોણનો જે ખુણો છે તેની સામેની બાજુની) બરાબર હોય તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

ઉપલા બધા પ્રયોગો પરથી, બે ત્રિકોણ એકરૂપ થવા માટે એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ અને ત્રણ ખુણા એ પૈકી ઓછામાં ઓછા કેટલા ભાગ મળતા આવવાજ જોઈએ, તે કહો. “ત્રણ.” કયા ત્રણ? (૧) “બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો; (૨) એક બાજુ અને બે ખુણા.”

ત્રિકોણમાં સરખી બાજુની સામેના ખુણા અને સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ.

બે બાજુ સરખી લંબાઈની અને ત્રીજી બાજુ જરા નાની કે મોટી લઈને એક ત્રિકોણ કરો. સરખી બાજુ એક બીજ પર પડે એવી રીતે ત્રિકોણ વાજો; એટલે સરખી બાજુની સામેના ખુણા એક બીજ પર બરાબર આવી રહેશે. (પુઠ). આ ઉપરથી સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાંના સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા સરખા હોય છે, એમ જણાઈ આવશે. સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા કોણમાપક વડે માપો, અને તેમને સરખાવો. તમને શું જણાય છે? “તે સરખા છે.” આ ઉપરથી ત્રિકોણમાંની સરખી બાજુની સામેના ખુણા વિષે તમને કયો નિયમ મળે છે? “સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા સરખા હોય છે.”

એક સમબાજુ ત્રિકોણ દોરો. તેના ખુણા પર નિશાની કરો અને તે કાપી કાઢો. તેમને એક બીજ જોડે સરખાવો. આ ખુણા વિષે તમને શું જણાઈ આવે છે? “દરેક ખુણો ૬૦°નો છે.”

આ ઉપરથી સમજાવું ત્રિકોણના ખુણા વિષે તમને કયો નિયમ મળી આવે છે? “સમજાવું ત્રિકોણના બધા ખુણા સરખા હોય છે, અને દરેક ખુણો 60° નો હોય છે.”

એક ગમે તેટલી લાંબી અથવા લીટી લો. \angle અથવા ગમે તેવડો સાંકડો ખુણો લો. \angle અથવા જેવડો \angle બાક કરો. અથવા અને બાક માપો. આ પ્રયોગ ત્રણ ચાર વખતે જુદી જુદી રીતે કરો. ત્રિકોણના બે સરખા ખુણાઓની સામેની બાજુઓ કેવી હોય છે, એ વિષે તમને શું સમજાય છે?

“ત્રિકોણમાંના સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ સરખી હોય છે.”

અથવા $=2''$, \angle અથવા $=60^\circ$, અને \angle બાક $=60^\circ$ લઈને ત્રિકોણ પુરો કરો. બાક, અથવા માપો. તેમની લંબાઈ અથવા સાથે સરખાવો. \angle બાક કેવડો છે? (પુ). અથવા $=1''$, \angle અથવા $=60^\circ$ અને \angle બાક $=60^\circ$ લઈને ત્રિકોણ પુરો કરો. બાક, અથવા માપો. તેમની લંબાઈને અથવા જોડે સરખાવો. \angle બાક કેવડો છે? આ ઉપરથી, જે ત્રિકોણના બે ખુણા 60° , 60° અંશના હોય છે, તે વિષે તમને કયો નિયમ મળી આવે છે? “તેનો ત્રીજો ખુણો 60° નો હોય છે અને તેની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે.” સમજાવું ત્રિકોણને વાળીને તેના બે સરખા ભાગ કરો. એમાંના દરેક ભાગ કાટખુણ ત્રિકોણ છે, અને તેના બે સાંકડા ખુણા અનુક્રમે 30° અને 60° ના છે, એમ જણાઈ આવશે. આ ત્રિકોણોમાં 30° ના ખુણાની સામેની બાજુ કર્ણથી અર્ધી હોય છે.

(૧) બાક $=2''$, \angle બ $=60^\circ$, \angle ક $=60^\circ$

(૨) બાક $=4''$, \angle બ $=60^\circ$, \angle ક $=60^\circ$

(૩) બાક $=2.5''$, \angle બ $=60^\circ$, \angle ક $=60^\circ$

લઈને ત્રિકોણ કરો. અથવા કેટલા ઇંચ છે? અથવાની સાથે બાક સરખાવો, અને આ ઉપરથી કાટખુણ ત્રિકોણના સાંકડા

ખુણા ૬૦° અને ૩૦°ના હોય, તો ૯૦° અને ૩૦°ના ખુણાની સામેની બાજુઓ શા પ્રમાણમાં હોય છે, એ વિષે જે નિયમ સમજતો હોય તે કહો.

“જે કાટખુણ ત્રિકોણમાંનો એક સાંકડો ખુણો ૩૦°નો હોય, તો તે ખુણાની સામેની બાજુ કર્ણથી અર્ધા હોય છે.”

એકરૂપ ત્રિકોણોનાં બીજાં લક્ષણ.

૧", ૨", ૨.૨"ની બાજુઓ લઈને ત્રિકોણ કરો. એજ બાજુઓ (એટલે એટલીજ લાંબી બાજુઓ) લઈને બીજો ત્રિકોણ કરો. આ ત્રિકોણ પહેલા ત્રિકોણ પર, સરખી બાજુઓ એક બીજી પર પડે એવી રીતે મૂકી જુઓ. આ બે ત્રિકોણોમાં કોઈ પણ બાબતનો તફાવત કે અસમાનપણું છે કે? ગમે તેવડી બાજુઓ લઈને એક ત્રિકોણ કરો. તેજ બાજુઓ ગમે તે ક્રમે લઈને બીજો ત્રિકોણ કરો. આ ત્રિકોણ પહેલા ત્રિકોણ પર એવી રીતે મૂકવાનો પ્રયત્ન કરો, કે તે નીચેના ત્રિકોણ પર ખરાબર આવી રહે. એવી રીતે ત્રિકોણ મૂકી શકાય છે કે? જેમની બાજુઓ અનુક્રમે સરખી હોય એવા ત્રિકોણોના સંબંધમાં ઉપલા પ્રયોગ પરથી તમને કયો નિયમ મળી આવે છે?

“એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓની ખરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

જેમાં \angle અબક કાટખુણો હોય એવો એક ગમે તે અબક કાટખુણ ત્રિકોણ લો. ડર્ફ કાટખુણો દોરો. ઈફમાંથી બક ખરાબર ઈગ ભાગ કાપી કાઢો. ગ મધ્યબિંદુ ધારીને કઅ ત્રિજ્યાએ વર્તુળ દોરો. ધારો કે તે ઈંડને હ બિંદુમાં છેદે છે. ગહ સાંધો.

અબક અને હઈગ આ કાટખુણ ત્રિકોણોમાં રચના પ્રમાણે અક કર્ણ=હગ કર્ણ, અને બક=ઈગ બાજુ છે.

∠બઅક, ∠ઈહગ માપો અને તેમને સરખાવો.
 ∠અકબ, ∠હગઈ માપો અને તેમને સરખાવો. અબ,
 હઈ માપો અને તેમને સરખાવો. સરખામણી પરથી શું
 જણાઈ આવે છે ?

જેમનાં કર્ણ અને ફક્ત એકેક બાજુ સરખાં હોય, એવા
 કાટખુણ ત્રિકોણોની જોડો લઈને ઉપલો પ્રયોગ અનેક વાર
 કરો. આ ઉપરથી તમને કયો નિયમ જણાઈ આવે છે ?

“જો એક કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક
 બાજુ બીજા કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ અને એક
 બાજુની અનુક્રમે બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ
 એકરૂપ હોય છે.”

ત્રિકોણમાંના ખુણા અને બાજુઓના નાનામોટા-
 પણાનો તેમની સામેની બાજુઓ અને ખુણાઓના
 નાનામોટાપણા સાથે સંબંધ.

વિષમ બાજુઓવાળો એક ત્રિકોણ દોરો. નાની બાજુની
 સામેનો ખુણો કાપી કાઢો. તેને મોટી બાજુની સામેના ખુણા
 પર મૂકી જુઓ, અને બેને સરખાવો. તમને કયો ખુણો
 મોટો જણાય છે ? “મોટી બાજુની સામેનો.” બીજો
 વિષમબાજુ ત્રિકોણ કરો, તેની નાની બાજુની સામેનો ખુણો
 કોણમાપકથી માપો. પછી મોટી બાજુની સામેનો ખુણો
 કોણમાપકથી માપો. તમને શું જણાય છે ? (પુ.).
 ત્રિકોણની નાની મોટી બાજુઓની સામેના ખુણા વિષે કયો
 સામાન્ય નિયમ ઉપલબ્ધ પ્રયોગ પરથી જણાઈ આવે છે ?

“ત્રિકોણની બે નાની મોટી બાજુઓમાંથી જે
 મોટી હોય છે, તેની સામેનો ખુણો નાની બાજુની
 સામેના ખુણાથી મોટો હોય છે.”

અબ ગમે તેટલી લાંબી લો. અબક ગમે તેવડો સાંકડો
 ખુણો લો. ∠અબકથી મોટો ∠બઅક લો. અક, બક

માપો. મોટા ખુણાની સામેની બાજુ મોટી છે, કે નાના ખુણાની સામેની ? અબ ગમે તેટલી લાંબી લો. અબક ખુણો ગમે તેવડો લો. \angle અબક, \angle અબકથી નાનો લઈને ત્રિકોણ પુરો કરો. અક, બક માપો. મોટા ખુણાની સામેની બાજુ મોટી છે, કે નાના ખુણાની સામેની ? આ ઉપરથી તમને કયો સામાન્ય નિયમ સમજાય છે ?

“ત્રિકોણનો એક ખુણો બીજા ખુણાથી મોટા હોય, તો મોટા ખુણાની સામેની બાજુ નાના ખુણાની સામેની બાજુથી મોટી હોય છે.”

	પહોળાખુણ ત્રિકોણ.	સાંકડાખુણ ત્રિકોણ.	કાટખુણ ત્રિકોણ.
સમબાજુ ત્રિકોણ.			
સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ.			
વિષમબાજુ ત્રિકોણ.			

ઉપર ત્રિકોણના જુદા જુદા પ્રકાર એક નીચે એક આપ્યા છે, અને તેમની આગળ ખાનાં પાડીને, તે ખાનાં કયા ધર્મ દર્શાવનારાં છે તે, તે ખાનાંની ઉપલી બાજુએ લખ્યું છે. મથાળે જણાવેલા ધર્મ જે ત્રિકોણને પુરેપુરા લાગુ પડતા હોય, તે ત્રિકોણોની સામેના તે ધર્મ દર્શાવનાર ખાનામાં ‘હા’ એમ લખો; અને તે ધર્મ જે ત્રિકોણને કદાચ લાગુ પડે એમ તમને લાગતું હોય તેમની સામેના તે ધર્મ દર્શાવનારા ખાનામાં “હોઈ શકે” એમ લખો.

ત્રિકોણની એક બાજુનો, બીજા બાજુઓના સરવાળા તથા બાહ્યબાકી સાથેનો સંબંધ.

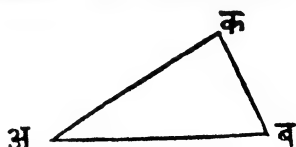
ક ડ એ બ

એક અબ લીટી લો. તેને અ તરફ ફ સુધી લંબાવો.

અફમાં ૬ િંદુ લો. અ મધ્યિંદુ અને અડ ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. બ મધ્યિંદુ અને બઅ+અડ (=૩૬) કરતાં મોટી (દાખલા તરીકે ૬૫) ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળ પહેલા વર્તુળને છેદે છે કે? “ના.” શા માટે? “૬૫ ત્રિજ્યા બઅ+અડ કરતાં વધારે છે તેથી.” આ વર્તુળ પહેલા વર્તુળને છેદે એમ કરવું હોય તો તેની ત્રિજ્યા કેવડી લેવી જોઈએ? “૬૬ કરતાં નાની.” (૫૦). ૬૬ કરતાં નાની ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. ધારો કે તે વર્તુળ પહેલાને ગ િંદુમાં છેદે છે. હવે ગ િંદુ અ ને બ સાથે સાંધવાથી જે ત્રિકોણ થાય છે તેમાં અબ તો પાંચોળ છે, અને ગઅ, અડ બરોબર છે, અને ગબ, અબ+અડના સરવાળા કરતાં નાની છે. આ પરથી માલમ પડશે કે જે ત્રીજી લીટી અબ+અડના સરવાળા કરતાં ઓછી હોય, તોજ એ વર્તુળો એક બીજાને છેદી શકે છે, એટલે આપેલી બાબતોએ ત્રિકોણ બની શકે છે. આ ઉપરથી, જેની બે બાબતોના સરવાળા કરતાં ત્રીજી બાબત મોટી હોય એવો ત્રિકોણ દોરી શકાય કે કેમ, એ વિષે શો નિયમ નીકળે છે?

અબ=૩”, બક=૨”, અને કઅ=૮” લઈને તમે ત્રિકોણ દોરી શકશો? અબ=૩”, બક=૨” અને કઅ=૧” લઈને ત્રિકોણ દોરી શકશો કે? “ના.” શા માટે નહિ? આકૃતિ દોરવાનો પ્રયત્ન કરો. ત્રિકોણ બની શકે એટલા માટે કઅની લંબાઈ ઓછામાં ઓછી કેટલી લેવી જોઈએ?

પાસેની આકૃતિમાં અ અને બ િંદુઓની વચ્ચે કેટલું અંતર છે? અથી બ સુધી અબ સીધી લીટી દોરવાને બદલે અકબ જેવી વાંકી લીટી દોરી હોય, તો તેની લંબાઈ અબથી વધારે થશે કે ઓછી? “વધારે; કારણ



કે અકબ વાંકી છે.” જ અને ક વચ્ચેનું અંતર માપો. એ બે બિંદુઓ વચ્ચે જાન્યે જાન્યે લીટી દોરી હોય, તો તે જાન્યે નાની થશે કે મોટી? “મોટી; કારણ કે જાન્યે સીધી લીટી છે, અને જાન્યે વાંકી લીટી છે.” એજ પ્રમાણે ક અને અ વચ્ચે અંતર કેટલું છે? કથી અ સુધી કા સીધી લીટી ન દોરતાં જાન્યે જાન્યે વાંકી લીટી દોરી હોય તો તેની લંબાઈ કાથી વધારે થશે કે ઓછી? “વધારે; કારણ કે જાન્યે વાંકી લીટી છે.” ત્રિકોણની કોઈ પણ એક બાજુ અને બીજી બે બાજુઓનો સરવાળો, એ બેમાં કોની લંબાઈ વધારે હોય છે? આ ઉપરથી ત્રિકોણની બે બાજુનો સરવાળો અને ત્રીજી બાજુ એમની વચ્ચે શા સંબંધ જણાય છે?

“ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરવાળો ત્રીજીથી વધારે હોય છે.”

ત્રિકોણની એક બાજુ ૪" અને બીજી ૨" હોય તો ત્રીજી બાજુની લંબાઈ ઓછામાં ઓછી કેટલી હોવી જોઈએ? “બે ઇંચ કરતાં વધારે.” શા માટે? “કેમકે બે ઇંચ કરતાં વધારે ન લઈએ, એટલે દાખલા તરીકે ૧ા ઇંચ લઈએ તો બે લીટીઓનો સરવાળો $૨+૧=૩$ એ ત્રીજી ૪ ઇંચ લાંબી લીટી કરતાં વધતો નથી.” (પૃ. ૦). આ ઉપરથી ત્રિકોણની બે બાજુની બાદબાકી ત્રીજી બાજુ કરતાં વધારે હોય છે કે ઓછી, એ વિષે શું સમજાય છે? “ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુની બાદબાકી ત્રીજી બાજુ કરતાં ઓછી હોય છે.”

ત્રિકોણોનું નાનામોટાપણું.

∠અબક ગમે તેવો લો. અબ જોડલી ડર્ફ બાજુ લો. ઈ બિંદુ પાસે ∠ડર્ફ, ∠અબકથી નાનો કરો. ઈફ,

બકની બરાબર કરો. ડફ અને અક સાંધો. અક, ડફ કરતાં નાની છે કે મોટી? \angle અબક ગમે તેવડો દોરો. અબ જેવડી ડઈ લીટી લો. ઈ ખિંદુ આગળ \angle ડઈફ, \angle અબકથી મોટો કરો. ઈફ, બકની બરાબર કરો. અક, ડફ સાંધો. અક, ડફથી નાની છે કે મોટી?

એક કાગળના કડકામાંથી બે નાના મોટા ખુણા કાપી કાઢો. બે નાની મોટી સળીઓ લો, અને તેવીજ એક બીજી જોડ લો. તેમાંથી એક જોડ લઈને તે (બે) સળીઓના છેડા એવી રીતે રાખો કે તે બે સળીઓની વચ્ચે કાગળના ખુણામાંના નાના ખુણા જેવડો ખુણો થાય. બીજી જોડ લો, અને તે બે સળીઓના છેડા એવી રીતે રાખો કે તે બે સળીઓની વચ્ચે કાગળના મોટા ખુણા જેવડો ખુણો થાય. ક્યું અંતર વધારે મોટું છે? પહેલી બે સળીઓના બીજા છેડા વચ્ચેનું, કે બીજી બે સળીઓના બીજા છેડા વચ્ચેનું? ઉપર વર્ણવેલા પ્રયોગ પરથી તમને શું સમજાય છે?

“ જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પણ પહેલાની બે બાજુઓની વચ્ચેના ખુણા બીજાની બે બાજુઓની વચ્ચેના ખુણાથી મોટો હોય, તો પહેલાનો પાંચો બીજાના પાંચાથી મોટો હોય છે. ”

ગમે તે લંબાઈની અબ,બક લીટીઓ લઈને એક ત્રિકોણ કરો. ડઈ,ઈફ લીટીઓ અનુક્રમે અબ,બક જેવડી લઈને ગમે તેવો એક બીજો ત્રિકોણ કરો. અક,ડફમાંથી કંઈ બાજુ મોટી છે? \angle અબક, \angle ડઈફ માપો. કયો ખુણો મોટો છે? અક, ડફના નાનામોટાપણા સાથે \angle અબક, \angle ડઈફના નાનામોટાપણાનો કંઈ પણ સંબંધ છે? “ હા. ” (પુ.). ગમે તેટલી લાંબી બે સળી લો. તેટલીજ લાંબી

બીજી બે સળી લો. બે નાની મોટી સળી લો. તેમાંથી નાની સળી અને સળીઓની પહેલી જોડનો એક ત્રિકોણુ કરો. મોટી સળી અને સળીઓની બીજી જોડનો બીજો એક ત્રિકોણુ કરો. બે ત્રિકોણુમાંથી એકની બે બાજુ બીજની બે બાજુ-ઓની બરાબર છે, પણ એકનો પાયો બીજના પાયાથી મોટો છે. આ પાયાની સામેના શિરોબિંદુ આગળના ખુણા માપો. કયો ખુણો મોટો છે ? આ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ સમજાય છે ?

“ જો બે ત્રિકોણુમાંથી એકની બે બાજુઓ બીજની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પણ પહેલા-ના પાયો બીજના પાયાથી મોટો હોય, તો જે ત્રિકોણુનો પાયો મોટો છે તેના પાયાની સામેના ખુણો, નાના પાયવાળા બીજ ત્રિકોણુના પાયાની સામેના ખુણાથી મોટો હોય છે. ”

ત્રિકોણુના બીજ કેટલાક ધર્મ.

એક કાગળના કડકામાંથી એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણુ કાપી કાઢો. તેને (મધ્ય ભાગમાં) વાળીને શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર લંબ કરો. લંબથી પાયાના જે બે ભાગ થાય છે તેમને સરખાવો. (પુ૦). શું જણાય છે ? “ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણુ-ના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર લંબ દાર્યો હોય, તો પાયાના બે સરખા ભાગ થાય છે. ”

એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણુ લો. તેને પાયો વાળીને દુભાગો. ત્રિકોણુને વાળીને પાયાના મધ્યબિંદુથી શિરોબિંદુ સુધી લીટી (અલગત સળરૂપે) દોરો. આ લીટીના પાયાની સાથે જે બે ખુણા થાય છે, તેમને એક બીજ સાથે સરખાવો, અને શું જણાય છે તે જુઓ. (પુ૦). “ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણુ-માં શિરોબિંદુમાંથી પાયાના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી

પાયાની સાથે જે બે ખુણા કરે છે, તે કાટખુણા હોય છે અને (અલખત) સરખા હોય છે.”

એજ નિયમ સમજાવતુ ત્રિકોણને લાગુ પડે છે કે ? “પડે છે.” શા માટે ?

એક ત્રિકોણની બધી બાજુઓને દુભાગો, અને ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ (એટલે મધ્યગા*) દોરો. (પુ૦). આ લીટીઓનાં છેદનબિંદુઓ વિષે શી ખાસ બાબત જણાઈ આવે છે ? “ત્રિકોણની બધી મધ્યગાઓ એક બીજીને એકજ બિંદુમાં છેદે છે.”

આ લીટીઓ એક બીજીને છેદીને તેમના જે બપ્પે ભાગ કરે છે તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. (પુ૦). તમને શું દેખાય છે ? “મધ્યગાનો ઉપલો ભાગ પાયા તરફના ભાગથી બમણો હોય છે.”

ત્રિકોણની ગમે તે બે બાજુઓને દુભાગો, ને તેમનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી દોરો. આ લીટી, દુભાગેલી લીટીઓના શિરોબિંદુ તરફના ભાગો સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમને પાયા આગળના ખુણાઓની સાથે સરખાવો. તેમજ આ લીટીની લંબાઈને પાયા સાથે સરખાવો. (પુ૦). આ ઉપરથી તમને પાચો અને આ લીટીની વચ્ચે શો સંબંધ જણાય છે ? “ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે અને તેનાથી અર્ધી હોય છે.”

ઘડી વાળીને ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગો. દુભાગનારાં બિંદુઓ ઘડી વાળીને સાંધો. આ ઘડીઓને લીધે ત્રિકોણના જે ચાર ભાગ થાય છે, તેમને કાપી કાઢો. તેમને એક બીજા પર મૂકીને સરખાવો. (પુ૦). તમને શું જણાય છે ? “તે બધા એકરૂપ છે.”

* ત્રિકોણના કોઈ પણ શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુના મધ્ય-બિંદુ સુધી દોરેલી લીટી ત્રિકોણની મધ્યગા કહેવાય છે.

ત્રિકોણની એક બાજુને એવી રીતે વાળો, કે તેના બે છેડા એક બીજા પર બરાબર આવી રહે. વાળવાથી પડેલો સળ તે બાજુને કાટખુણે દુભાગે છે. એજ પ્રમાણે બીજી બાજુને વાળો, અને પછી ત્રીજી બાજુને વાળો. આ બધા સળો એક બીજાને ક્યાં મળે છે, એ વિષે જે ખાસ બાબત જણાઈ આવતી હોય તે કહો. તેઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે કે? “હા.” (પુઠ). આ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે? ત્રિકોણની બે બાજુઓ પર તેમનાં મધ્યબિંદુઓમાંથી બે લંબ દોરો. તે જ્યાં મળે છે ત્યાંથી ત્રીજી બાજુના મધ્ય-બિંદુ સુધી લીટી દોરો. આ લીટી ત્રીજી બાજુની સાથે કેવડો ખુણો કરે છે? આ પરથી કયો નિયમ નીકળે છે?

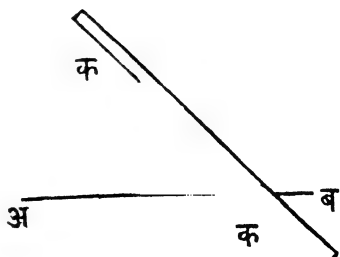
“ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગનારા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે.”

ત્રિકોણના ખુણા ઘડી વાળીને દુભાગો. ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજાને ક્યાં મળે છે, એ વિષે જે કંઈ ખાસ બાબત જણાઈ આવતી હોય તે કહો. “તે બધી એકજ બિંદુમાં મળે છે.”

લંબ.

આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર લંબ દોરવાની રીત:—

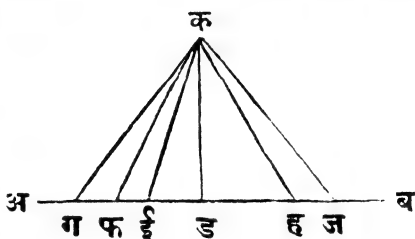
ધારો કે અબ આપેલી લીટી છે, અને ક આપેલું બિંદુ છે. ત્રિકોણ-માપની કાટખુણો કરનારી એક બાજુ અબને લગાડીને માપ અબની ઉપર કે નીચે રાખો. પછી માપના



કર્ણને (એટલે કાટખુણાની સામેની બાજુને) લગાડીને કુટપટી મૂકો. પછી ત્રિકોણમાપની કાટખુણો કરનારી બીજી બાજુ આપેલા બિંદુને બરાબર અડકી રહે ત્યાંસુધી માપને પટ્ટીની બાજુએ ને બાજુએ (જરૂર પ્રમાણે ઉપર કે નીચે) ખસેડો, અને આપેલા બિંદુમાંથી માપની બાજુની લગોલગ લીટી દોરો.

અબ લીટી પર કડ લંબ દોરો. પછી ક બિંદુમાંથી કઈ, કફ, કગ, ગમે તે બીજી લીટીઓ અબને મળે એમ દોરો.

કડની લંબાર્ધ અ ગ ફ ઈ ડ હ જ બ માપો. પછી કઈ,



કફ, કગની લંબાર્ધ માપો. આ લીટીઓમાં સૌથી નાની લીટી કઈ? “લંબ.” ક બિંદુમાંથી અબ સુધી લંબચી નાની લીટી દોરી શકાશે કે? “ના.”

આ ઉપરથી, કોઈએક બિંદુમાંથી એક લીટી સુધી જેટલી લીટીઓ દોરી શકાય, તેમાં સૌથી નાની લીટી કઈ, એ વિષે શો નિયમ સમજાય છે? “લંબ સૌથી નાની લીટી હોય છે.”

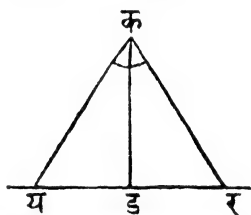
ડકઈ અને ડકફ ખુણા પૈકી મોટો ખુણો કયો? કઈ અને કફ આ લીટીઓમાં મોટી લીટી કઈ? તેમજ ડકહ અને ડકજ એ ખુણાઓમાં મોટો ખુણો કયો? કહ, કજમાં મોટી લીટી કઈ? કમાંથી અબ લીટીને મળનારી જે લીટીઓ દોરી છે, તે લીટીઓ કડ લંબની સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમાં ડકઈ ખુણા કરતાં ડકફ ખુણો મોટો છે, અને ડકફ કરતાં ડકગ મોટો છે; અને કઈથી કફ

લીટી મોટી છે, અને કફથી કગ મોટી છે. આ ઉપરથી કોઈ એક બિંદુમાંથી કોઈ લીટી સુધી દોરેલી લીટીઓ તેજ બિંદુમાંથી તે લીટી પર દોરેલા લંબની સાથે જે ખુણા કરે છે, તે ખુણાઓનો તે લીટીઓની લંબાઈની સાથે શો સંબંધ જણાય છે ?

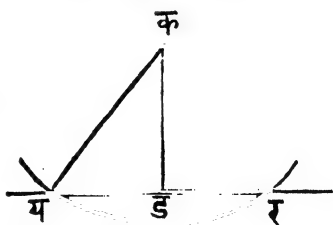
“આ ખુણો જેમ મોટા તેમ તે લીટી લાંબી હોય છે.”

ઉપલી આકૃતિમાં \angle કઈડ, \angle કફડ, \angle કગડ એ ખુણાનું નાનામોટાપણું અને કઈ, કફ, કગ લીટીઓનું નાનામોટાપણું એ બે વચ્ચે તમને કંઈ સંબંધ જણાઈ આવે છે ? “લંબ તરફનો ખુણો જેમ નાનો તેમ ખુણો કરનારી લીટી લાંબી હોય છે.”*

ચર લીટી પર દોરેલા કડ લંબની સાથે ગમે તે ડકચ ખુણો કરો. \angle ડકચ બરાબર \angle ડકર કરો. કચ અને કર માપો. તેમને સરખાવો. આ ઉપરથી લંબની સાથે સરખા ખુણા કરનારી લીટીઓના સંબંધમાં તમને શું જણાઈ આવે છે ? “લંબની જોડે સરખા ખુણા કરનારી લીટીઓ સરખી હોય છે.”



એક આડી લીટીમાં ગમે ત્યાં ર બિંદુ લો. તેના પરના લંબમાંના ક બિંદુને મધ્ય-બિંદુ લઈને કર ત્રિજ્યા-એ, આડી લીટીને ય બિંદુમાં છેદે એવો રચ ક્રૅસ દોરો. કચ, કર



* તેમ છતાં પણ ઉપદ્ધા બે પ્રયાગ પરથી એમ સિદ્ધ થતું નથી કે ખુણાના પ્રમાણમાંજ લીટીની લંબાઈ હોય છે, એટલે ખુણો દોઢગણો મોટો હોય તો લીટી દોઢગણી મોટી કે નાની હોય.

સાંધો. \angle ઉકય, \angle ઉકરને સરખાવો. તમને શું જણાઈ આવે છે ?

ઉપલા પ્રયોગ પરથી, કોઈ લીટી પર દોરેલા લંબના કોઈ એક બિંદુમાંથી તે લીટી સુધી સરખી લીટીઓ દોરી હોય, તો તેઓ લંબ સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમના સંબંધમાં શો નિયમ જણાય છે ? “આપેલી લીટી સુધી તેના પરના લંબમાંના કોઈ બિંદુમાંથી દોરેલી સરખી લીટીઓ લંબની જોડે સરખા ખુણા કરે છે.”

એક અબ લીટી દોરો. તેની બહાર ક બિંદુ લો. ક બિંદુથી અબ કેટલે અંતરે છે ? કમાંથી અબ સુધી ગમે તેટલી લીટીઓ દોરી શકાશે, અને કદાચ એમ ધારવામાં આવશે કે તે બધી લીટીઓ ક અને અબ વચ્ચેનું અંતર દર્શાવી શકશે. પરંતુ કોઈ પણ બે સ્થળ વચ્ચેનું અંતર પૂછ્યું હોય, તો જે અંતર ઓછામાં ઓછું હોય તે આપણે કહીએ છીએ; ચાટે કથી અબ સુધીનું અંતર તે ક અને અબ વચ્ચેનું ઓછામાં ઓછું અંતર છે. આ અંતર ક્યું છે તે આગળ આવી ગએલા પ્રયોગ ઉપરથી આપણાથી કહી શકાશે કે ? “આ અંતર કમાંથી અબ પર દોરેલો લંબ છે.” કમાંથી અબ ઉપર લંબ દોરો. આ લંબ કરતાં નાની લીટી કમાંથી અબ ઉપર દોરી શકાશે કે ? “ના”. આ પરથી આપણે જાણી શકીએ છીએ, કે આપેલું બિંદુ અને આપેલી લીટી એ બે વચ્ચેનું અંતર તે બિંદુમાંથી તે લીટી પર દોરેલા લંબની લંબાઈ છે.

પ્રશ્ન.

(૧) અબ=૧.૨” લો. બ છેડા સાથે કાટખુણો કરનારી લીટી દોરો.

(૨) અબ, કડ લીટીઓ દોરો, અને બમાંથી કડ પર લંબ દોરો.

(૩) ગમે તેવો એક ત્રિકોણ દોરો. તેના એક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર લંબ દોરો.

(૪) ગમે તેવો એક ખુણો કરો. તેને ઘડી વાળીને દુભાગો. દુભાગનારી લીટી(સળ) પર ગમે ત્યાં એક બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી ખુણાના બુજો પર લંબ દોરો. તે માપો અને તેમને સરખાવો. તમને શું દેખાય છે ? “ તે સરખા છે. ”

(૫) ગમે તેવો એક ત્રિકોણ કાઢો. તેની બાજુઓ દુભાગો. દુભાગનારાં બિંદુઓમાંથી લંબો દોરો. તેમને એક બીજાને મળતાં સુધી લંબાવો. તેઓ એક બીજાને ક્યાં મળે છે એ વિષે તમને કંઈ વિશેષ બાબત જણાઈ આવે છે ? (પુઠો).
“ તે બધા એકજ બિંદુમાં મળે છે. ”

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ.

બે સમાંતર લીટીઓ દોરો. તેમને છેદનારી એક લીટી દોરો. તેને સમાંતર બીજી લીટી દોરો. આ ચાર લીટીઓથી બનેલી આકૃતિની સામસામી બાજુઓ સમાંતર છે, માટે તેને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કહે છે.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ જેવા દેખાતા કેટલાક પદાર્થનાં નામ કહો. અટકળથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો. તેની બાજુઓ સમાંતર છે કે નહિ તે જુઓ.

વ્યાખ્યા:—જે ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓ સમાંતર હોય છે તેને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કહે છે.

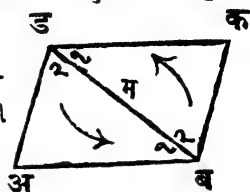
જુદા જુદા પ્રકારના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો. તેમની સામસામી બાજુઓ અને સામસામા ખુણા માપો. તેમને કણો દોરો, અને કણોએ એક બીજાના કરેલા ભાગ અને તેમને સરખાવો. (પુઠો). આ પરથી તમને સામાન્ય નિયમ સમજાય છે ? “ સામસામી બાજુ

અને ખુણા સરખા હોય છે. ” સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણથી થએલા બે ત્રિકોણરૂપ ભાગ એક બીજા પર મૂકી જુઓ. (પૃ. ૦). શું જણાઈ આવે છે? “તેઓ એકરૂપ છે.”
(નીચેનો પ્રયોગ પ્રત્યક્ષ કરવો.)

અબકડ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. વડ કર્ણ છે. વડનું મધ્યબિંદુ મ છે, એમ ધારો.

$\angle અબડ = \angle વડક$
 $\angle અડવ = \angle કવડ$

કારણ કે તે સમાંતર લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે.



હવે અબકડ ચતુષ્કોણની નકલ અબકડ ચતુષ્કોણ પર મૂકીને મ બિંદુની આસપાસ અર્ધા વર્તુળ જેટલી ફેરવીને મૂકી હોય તે! મવ, મડ બરાબર છે તેથી વ, ડ પર પડશે. બ્યારે વ, ડ પર પડે છે, ત્યારે $\angle અબડ$, $\angle વડક$ ની બરાબર હોવાથી વઅ, ડક પર પડશે. તેમજ ડમ = મવ, માટે ડ, વ પર પડશે; અને $\angle અડવ = \angle કવડ$ છે, માટે ડઅ, વક ઉપર પડશે.

હવે વઅ, ડક પર પડશે, અને ડઅ, વક પર પડશે, માટે અ, ક પર બરાબર આવી રહેશે.

એજ પ્રમાણે બીજી શકારે કે ડક, વઅ ઉપર પડે છે; કવ, અડ પર પડે છે; અને અલગત ક, અ પર પડે છે.

આ ઉપરથી આપણે જોઈએ છીએ કે વઅ, ડકની બરાબર છે; અડ, વકની બરાબર છે; અમ, મકની બરાબર છે; સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર છે; અને કર્ણથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બે સરખા ભાગ થાય છે.

ઉપલા બધા પ્રયોગો પરથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કયા ધર્મ જણાઈ આવે છે?

“સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં—

(૧) સામસામા ખુણા સરખા હોય છે;

- (૨) સામસામી બાબુઓ સરખી હોય છે;
 (૩) દરેક કર્ણથી સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણના બે સરખા ભાગ થાય છે; અને
 (૪) બંને કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે.

સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણના જુદા જુદા પ્રકાર.

એક બીજી સાથે મધ્યભાગે કાટખુણો કરનારી બે સરખી લીટીઓ દોરો. તેમના છેડામાંથી પકેલી બે લીટીઓને સમાંતર લીટીઓ દોરીને સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણ પુરો કરો. આ ચતુષ્કોણની બધી બાબુઓ અને ખુણા માપો, અને તેમને સરખાવો. શું જણાય છે? “બધી બાબુ સરખી છે, અને બધા ખુણા કાટખુણા છે.” એવી આકૃતિને ચોરસ કહે છે.

કાગળના બે સરખા ચોરસ કાપી કાઢો. તે પૈકી એક ચોરસ બીજા પર જુદી જુદી રીતે મૂકીને ચોરસના ખુણા અને બાબુઓ સરખાવો. શું જણાય છે ?

એક બીજી સાથે કાટખુણો કરનારી બે નાની મોટી લીટી લઈને સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય, તો જે આકૃતિ બને છે તેને લંબચોરસ કહે છે.

એક બીજી સાથે તિર્યક્ (સાંકડો કે પહોળો) ખુણો કરનારી બે સરખી લીટી લઈને સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય, તો જે આકૃતિ થાય છે, તેને સમબાબુ ચતુષ્કોણ કહે છે.

એક બીજી સાથે તિર્યક્ (સાંકડો કે પહોળો) ખુણો કરનારી બે નાની મોટી લીટી લઈને સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય, તો જે આકૃતિ બને છે, તેને સમપ્રતિબુજ ચતુષ્કોણ કહે છે. [સમપ્રતિબુજ=સમ એટલે સરખી (છે) પ્રતિ એટલે સામસામી, બુજ એટલે બાબુઓ (જેની તે).]

ઉપર ચોરસ વિષે જે પ્રયોગ કર્યા છે, તે લંબચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ, અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ, એ બધાના સંબંધમાં કરો; અને તેમની બાજુઓ અને ખુણાઓ વિષે કયો નિયમ નીકળે છે તે જુઓ.

“લંબચોરસની સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે, અને સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે.”

“સમબાજુ ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુ સરખી હોય છે, અને ફક્ત સામસામા ખુણા સરખા હોય છે.”

“સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણની ફક્ત સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા હોય છે.”

નીચે આપેલી લંબાઈવાળી લીટીઓ લઈને તેમના પર ચોરસો દોરો:—

૧", ૧.૨", ૧.૪", ૯ મિ.મી; ૧.૨ સે.મી; ૧.૫ સે.મી; ૨.૨ સે.મી.

નીચે આપેલી લંબાઈ પહોળાઈના લંબચોરસ દોરો:—

૨", ૧"; ૧.૨", ૧"; ૧.૪", ૦.૮"; ૩", ૨"; ૨.૨", ૧.૨"; ૩.૫", ૧.૪".

નીચે આપ્યા પ્રમાણે એક બાજુ અને ખુણો લઈને સમબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો:—

અબ=૧", \angle ડઅબ=૪૫°; અબ=૧.૩", \angle ડઅબ=૭૫°; અબ=૧.૫", \angle ડઅબ=૧૨૦°.

નીચે આપેલી બાજુઓ અને ખુણા લઈને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ દોરો:—

અબ	ડઅ	\angle ડઅબ
૨"	૧.૫"	૩૦°
૧.૨"	૧"	૧૨૦°

૨"	૨.૨"	૧૦૦°
૧.૭"	૧.૮"	૪૮°

ચોરસ, લંબચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ, અને સમપ્રતિ-
ભુજ ચતુષ્કોણ એમના અંતે કર્ણ દ્વેરો; અને કર્ણોના ભાગો
અને તેમની વચ્ચેના ખુણા સરખાવો. (પૃ૦). શું જણાઈ
આવે છે ? “ ચોરસના કર્ણો એક બીજાને કાટખુણે
દુભાગે છે; લંબચોરસના કર્ણો સરખા હોય છે, અને
તે તિર્યક્ (સાંકડા કે પહોળા) ખુણે એક બીજાને
દુભાગે છે (એટલે તે એક બીજા પર લંબ હોતા
નથી). સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને
કાટખુણે દુભાગે છે. સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના કર્ણો
એક બીજાને તિર્યક્ ખુણે દુભાગે છે. ”

વ્યાખ્યા—

જે ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે અને બધા
ખુણા કાટખુણા હોય છે તેને ચોરસ કહે છે.

જે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે અને પાસ-
પાસેની બાજુઓ નાની મોટી હોય છે, તેને લંબચોરસ કહે છે.

જે ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુઓ સરખી હોય છે અને બધા
ખુણા તિર્યક્ (જે સાંકડા અને જે પહોળા) હોય છે તેને
સમબાજુ ચતુષ્કોણ કહે છે.

જે ચતુષ્કોણની ફક્ત સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે
અને બધા ખુણા તિર્યક્ (જે સાંકડા ને જે પહોળા) હોય છે
તેને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ કહે છે.

જે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે તેને
કાટખુણ ચોખુણ કહે છે.

જેની કોઈ પણ બાજુઓ સમાંતર નથી એવો એક
ચતુષ્કોણ દ્વેરો. તેની સામસામી બાજુઓ અને સામસામા ખુણ

માપો. (પુ૦). એવા ચતુષ્કોણની સામસામી કે પાસપાસેની બાજુઓ અને ખુણા હંમેશજ સરખા હોય છે કે? એવા ચતુષ્કોણને વિષમબાજુ ચોખુણુ કહે છે; કારણ કે તેની બાજુઓ વિષમ એટલે નાની મોટી હોય છે.

ચોખુણુની કક્ષા બેજ બાજુ સમાંતર હોય તો તેને સમલંબ ચોખુણુ કહે છે.

ઉપર આપેલી વ્યાખ્યાઓની શરૂઆતમાં કહેલા ચોખુણુ કે ચતુષ્કોણના નિયમિત પ્રકાર સિવાય જેમના ધર્મ નિયમિત હોય એવો ચોખુણુનો હવે કોઈ બીજો પ્રકાર પડી શકે એમ છે કે?

એક વિષમબાજુ ચોખુણુ અને એક સમલંબ ચોખુણુ હાથે દોરો.

ચોરસ અને લંબચોરસના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે, માટે આ આકૃતિઓ કાટખુણુ ચોખુણુ કહેવાય છે.

બધા કાટખુણુ ચોખુણુ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે? “તેમના બધા ખુણા સરખા હોય છે, અને તેમના બંને કર્ણ સરખા હોય છે.”

ચોરસ અને સમબાજુ ચોખુણુ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે? “તેમની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે અને તેમના કર્ણો એક બીજા પર લંબ હોય છે.” તેઓ કઈ બાબતમાં જુદા પડે છે? “.....”

બધા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણુ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે? “તેમની સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા હોય છે, અને તેમના કર્ણો એક બીજાને દુભાગે છે.”

લંબચોરસ અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણુ કઈ બાબતમાં એક બીજાને મળતા આવે છે? કઈ બાબતમાં તેઓ જુદા પડે છે?

ચતુષ્કોણના જુદા જુદા પ્રકાર નીચે અનુક્રમે આપ્યા છે, અને તેમની સામે ખાનાં પાડેલાં છે. તે ખાનાં કયા ધર્મ દર્શાવે છે તે ખાનાંની ઉપલી બાજુએ લખેલું છે. તો મથાળે આપેલા ધર્મ જે જે ચતુષ્કોણમાં હોય તેમની સામે તે ધર્મ દર્શાવનારાં ખાનાંમાં 'હા' એમ લખો.

	સામસામી બાજુએ અને ખેલો સરખા છે?	કોણે એક બીજને દુભાગે છે?	અથવા ખેલો કાટખેલો છે?	કોણે સરખા છે?	કોણે એક બીજને પર લંબ છે?	પાસપાસેની બાજુ- એ સરખી છે?
સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ						
સમબાજુ ચતુષ્કોણ						
લંબચોરસ						
ચોરસ						
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ						

એવા ચોખ્ખા દોરો કે જેમની

(૧) સામસામી બાજુઓ સરખી હોય, અથવા

(૨) સામસામા ખુણા સરખા હોય, અથવા

(૩) સામસામી બે બાજુઓ સરખી અને

સમાંતર હોય, અથવા

(૪) જેમના કર્ણ એક બીજાને દુભાગતા હોય; અને તેમની સામસામી બાજુઓ સમાંતર છે કે કેમ તે જુઓ. (પુ૦).

આ ઉપરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ?

“ ચોખ્ખામાં જો—

(૧) સામસામી બાજુઓની બે જોડમાંથી દરેક જોડમાંની બાજુઓ સરખી હોય; અથવા

(૨) સામસામા ખુણા સરખા હોય; અથવા

(૩) સામસામી બાજુઓની બે જોડમાંથી એક જોડમાંની બે બાજુઓ સરખી અને સમાંતર હોય; અથવા

(૪) કર્ણો એક બીજાને દુભાગતા હોય, તો તે ચોખ્ખા સમાંતરબાજુ હોય છે.”

પ્રશ્ન.

નીચેનાં માપ ઉપરથી કહેલી આકૃતિઓ બનાવો:—

(૧) જેની બાજુઓ ૪" અને ૫" હોય એવો કાટખુણા ચોખ્ખા.

“ “ ૩" અને ૨ $\frac{1}{2}$ " “ “ “ “

“ “ ૩.૨" અને ૫" “ “ “ “

“ “ ૧.૫" અને ૨" “ “ “ “

(૨) જેની બાજુઓ ૩" અને ૪" હોય અને જેની બાજુઓની વચ્ચેનો ખુણો ૪૦° હોય એવો સમાંતરબાજુ ચોખ્ખા.

જેની બાજુઓ ૧" અને ૫" ને વચ્ચેનો ખુણો ૬૦° હોય એવો.

„ ૨" અને ૩" „ ૮૦° „

„ ૫" અને ૪" „ ૧૨૦° „

„ ૨" અને ૪" „ ૧૫૦° „

(૩) નીચેનાં માપ ઉપરથી ચોખુણુ કરો:—

અવ=૬.૩ સે.મી., બ=૮૨°, બક=૮.૨ સે.મી., ક=૯૦°, કડ=૭.૭ સે.મી.

અવ=૩.૪", બક=૨.૨", અડ=૨.૯", અ=૬૮°, બ=૮૬°.

બ=૧૧૬°, બક=૧.૪", ક=૯૯°, કડ=૧.૯", ડ=૯૨°.

અ=૬૭°, બ=૧૧૩°, ક=૪૬°, અવ=૫.૩", અડ=૮.૬°.

બ=૧૨૨°, ક=૧૩૦°, ડ=૪૫°, બક=કડ=૧.૬°.

અડ=૩", ડ=૧૧૮°, ડઅક=૨૭°, બઅક=૩૫°, અવ=૨.૪°.

અક=૫.૬", બઅક=૫૮°, ડઅક=૫૯°, બકઅ=૫૮°, ડકઅ=૬૯°.

અવ=૧.૯", બડ=૧.૭", કડ=૨", અવડ=૧૧૮°, બડક=૨૩°.

અવ=કડ=૫.૮ સે.મી; અડ=૪.૭ સે.મી; અ=૭૨°, બડક=૪૬°.



પ્રકરણ ૨.

ભૂમિતિમાંની કેટલીક મૂળ કલ્પનાઓ અને વ્યાખ્યાઓ.

[સૂચના:—આની પહેલાંનો સર્વ ભાગ જેમને ચાલી ગયો હોય એવા વિદ્યાર્થીઓ માટેજ આ ભાગ છે. આ પહેલે ફેરે ન લેતાં પહેલા ખંડના પુનરાવર્તન વખતેજ લેવો.]

ભૂમિતિ એટલે શું ?

એક ખેતરથી બીજું ખેતર કેટલું મોટું છે, તે તેમની લંબાઈ અને પહોળાઈ જોઈને આપણે કહી શકીએ છીએ. એજ રીતે એક લાકડાના ધન કરતાં બીજો ધન કેટલો મોટો છે, એ તેમની લંબાઈ, પહોળાઈ અને જડાઈ જોઈને કહી શકીએ છીએ. પરંતુ આ કામ માટે લંબાઈ, પહોળાઈ અને જડાઈ પરથી પદાર્થોનું કદ નક્કી કરવાના જે નિયમો આંધ્ર-વામાં આવ્યા છે, તે જાણવાની જરૂર છે. પદાર્થોની આગુ-ઓના અને ખુણાઓના જે ધર્મો ઉપરથી આ નિયમો નક્કી થયા છે, તે ધર્મોનું વિવેચન જે શાસ્ત્રમાં કર્યું છે, તેને ભૂમિતિ કહે છે.

જમીન કેમ માપવી એનો વિચાર કરતાં, પદાર્થોની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ખુણા પરથી તેમનું પરિમાણ નક્કી કરવાના કેટલાક નિયમો લોકોના જાણવામાં આવ્યા; તેથી આ નિયમોના શાસ્ત્રનું ભૂમિતિ એ નામ પાડ્યું. [ભૂ=પૃથ્વી, જમીન; માત=માપવું (નામ).]

પદાર્થ.

[નીચેના વિવેચનમાં ‘પદાર્થ’ શબ્દનો અર્થ જેને રૂપ કે આકાર હોય એવી કોઈ પણ વસ્તુ, એમ સમજવો.]

પદાર્થો જગા રોકે છે, તેથી તેઓ જેટલી અને જે પ્રકારની જગા રોકે છે, તેટલો અને તેવો તેમનો આકાર હોય છે. પેટી ચોખંડી જગા રોકે છે માટે તેનો આકાર ચોખંડો હોય છે. જ્યારે કાદવનો ગોળો ગોળ જગા રોકે છે, ત્યારે તેનો આકાર ગોળ થાય છે. જો તેજ કાદવનો ગોળો કોઈ ચોખંડી પેટીને ભરી કાઢે, તો તે ચોખંડી પેટીમાંની જગા રોકશે, અને તેથી તેનો આકાર ચોખંડો થશે. પાણી ગાગરમાંની જગા રોકે છે, ત્યારે તે ગાગરનો આકાર ધારણ કરે છે; પણ તે એક સીસીમાં ભર્યું હોય, તો તે સીસીનો આકાર ધારણ કરશે.

અથા પદાર્થો વિષે આપણને નીચેનો સામાન્ય નિયમ જણાઈ આવે છે:—અથા પદાર્થોને કોઈ પણ આકાર હોય છે, અને તેઓ કોઈ પણ જગા રોકે છે.

કેટલાક પદાર્થ (પાટીઆના કડકા વગેરે) એવા હો, કે જેમની પહોળાઈ અને જડાઈ સરખી હોય, પણ લંબાઈ ઓછીવત્તી હોય; કેટલાક એવા હો, કે જેમની લંબાઈ અને જડાઈ સરખી હોય, પણ પહોળાઈ ઓછીવત્તી હોય; અને કેટલાક એવા હો, કે જેમની લંબાઈ અને પહોળાઈ સરખી હોય, પણ જડાઈ ઓછીવત્તી હોય; અને છોકરાઓ પાસે તેમની સરખામણી કરાવીને, અથવા અમુક પદાર્થ કેટલો મોટો છે, તે તેની બાબુઓની મદદથી તેમની પાસે કહેવડાવીને નીચેનો સામાન્ય નિયમ કઢાવો:—

સર્વ પદાર્થોને લંબાઈ, પહોળાઈ અને જડાઈ હોય છે. લંબાઈ, પહોળાઈ અને જડાઈ, એ પરિ-
મ્મેયો સર્વ પદાર્થોને હોય છે; માટે સર્વ પદાર્થોને ત્રિપરિમેયાત્મક (એટલે ત્રણ પરિમેયોવાળા) કહે છે.

કેટલાક પદાર્થોને લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ—આ

પરિભેયો પૈકી એક અથવા વધારે પરિભેયો સૂક્ષ્મ હોય છે, પરંતુ તે બીજાકુલ હોતાં નથી એમ કદી પણ બનતું નથી.

લંબાઈ, પહોળાઈ, જડાઈ.

કોઈ પણ પદાર્થ જે બાબુએ વધતો જતો દેખાય છે, તે બાબુને તે પદાર્થની લંબાઈ; લંબાઈની સપાટીમાં હોઈને લંબાઈની સાથે કાટખુણો કરનારી આડી બાબુને તેની પહોળાઈ; અને આ બંનેની જોડે કાટખુણો કરનારી (અથવા બંને પર ઉભી આવેલી) બાબુને તેની જડાઈ કહેવાનો સામાન્ય રિવાજ છે. પરંતુ કોઈ કોઈ વખતે પદાર્થની સૈથી મોટી બાબુને લંબાઈ, તેનાથી નાની બાબુને પહોળાઈ અને સૈથી નાની બાબુને જડાઈ, એમ પણ કહે છે. તેમ છતાં એટલું ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ, કે લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ એ કેવળ સાંકેતિક (અને સાપેક્ષ) શબ્દો છે; અને તે શબ્દો કોઈ પણ બાબુને લગાડ્યા હોય, તોપણ તે પરથી ગણિત કરવામાં ભૂલ થવાનો સંભવ નથી.

૫૪.

આ દડાને જુદી જુદી બાબુએથી જુઓ. તેનો આકાર સર્વ બાબુએથી સરખોજ દેખાય છે કે ? આ આંકણી (ગોળ આંકણી) તરફ જુદી જુદી બાબુએથી જુઓ. તેનો આકાર સર્વ બાબુએથી સરખોજ દેખાય છે કે ? પૈસો સર્વ બાબુએથી જુઓ. તેનો આકાર બધી તરફથી સરખોજ દેખાય છે કે ? આ ઈંટ તરફ તમે ગમે તે બાબુએથી જુઓ, તોપણ તે સરખીજ દેખાય છે કે ? તે લંબાઈની બાબુએથી જોઈ હોય તો કેવી દેખાય છે ? પહોળાઈની બાબુએથી જોઈ હોય તો કેવી દેખાય છે ? ઉપલી બાબુએથી કેવી દેખાય છે ? દડો બધી બાબુથી સરખો દેખાય છે, પણ

આંકણી, પૈસો, ઇંટ વગેરે પદાર્થો બધી તરફથી સરખા દેખાતા નથી. એનું કારણ શું? “તેમની બાબુઓ જુદા પ્રકારની છે, એટલે તેમનાં પૃષ્ઠ જુદા પ્રકારનાં છે.”

આ ઉપરથી પદાર્થોના સંબંધમાં વળી કયો ધર્મ સમજાય છે? “તેમને પૃષ્ઠો* હોય છે.”

દડાને કેટલાં પૃષ્ઠ હોય છે? શંકુને કેટલાં? ગોળાર્ધને કેટલાં? પૈસાને કેટલાં? પેટીને કેટલાં? “દડાને એક પૃષ્ઠ હોય છે, શંકુને અને ગોળાર્ધને બે પૃષ્ઠ હોય છે, પૈસાને ત્રણ પૃષ્ઠ હોય છે, પેટીને છ પૃષ્ઠ હોય છે.” વાંકાચુંકા પથ્થરને કેટલાં પૃષ્ઠ હોય છે? “તેને અનેક પૃષ્ઠ હોય છે.”

દડાનું પૃષ્ઠ અને ધનનું પૃષ્ઠ તપાસો. તે બે વચ્ચે તમને શો તફાવત જણાય છે? “દડાનું પૃષ્ઠ વક્ર છે, અને ધનનું પૃષ્ઠ સપાટ છે.”

પૃષ્ઠ બે પ્રકારનાં છે—સપાટ અને વક્ર.

જેનાં બધાં પૃષ્ઠો સપાટ હોય, એવા પદાર્થને ઓછામાં ઓછાં કેટલાં સપાટ પૃષ્ઠો હોય છે? “ચાર. દાખલા તરીકે, ત્રિકોણાકાર મિનારો કે શંકુ.”

કોઈ પણ પદાર્થનાં બે પૃષ્ઠો જ્યાં એકમેકને મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે? “કોર.” આ કોર ભૂમિતિમાંની કઈ આકૃતિ જેવી દેખાય છે? “લીટી જેવી.” બેથી વધારે પૃષ્ઠો જ્યાં એકમેકને મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે? “અણી.” કોરો મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે? “અણી.” અણી, ભૂમિતિમાંની કઈ આકૃતિ જેવી દેખાય છે? “ખિંદુ જેવી.”

* બાબુ કરતાં પૃષ્ઠ શબ્દ વધારે સારો છે. બાબુ શબ્દનો કોર એવો પણ અર્થ થાય છે; પરંતુ પૃષ્ઠ શબ્દનો એકજ અર્થ થાય છે; તેથી પૃષ્ઠ શબ્દનો ઉપયોગ કર્યો હોય તો અર્થની બાબતમાં ગુંચવાડો થશે નહિ.

એ પૃષ્ઠો ફક્ત એકજ લીટીમાં મળી શકે છે; તેથી ‘(પાસપાસેનાં) એ પૃષ્ઠોને એક બીજાથી ઓળખાવનારી આકૃતિને લીટી કહેવી.’ એવી, લીટીની વ્યાખ્યા કોઈ કોઈ વખતે આપવામાં આવે છે.

ત્રિકોણાકાર શંકુને પૃષ્ઠ કેટલાં ? કોરો કેટલી ? ખુણા કેટલા ? અણી કેટલી ? એ પૃષ્ઠ મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે ? “કોર.” કોરો મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે ? “અણી.” ત્રિકોણાકાર શંકુનાં એકજ વખતે વધારેમાં વધારે કેટલાં પૃષ્ઠ દેખાય છે ? (ધન, શંકુ, ઈટ.....વગેરેના સંબંધમાં એવાજ પ્રશ્નો પૂછવા.)

ઉપલા વિવેચન પરથી એમ સ્પષ્ટ માલમ પડશે કે પદાર્થોના છેડા પૃષ્ઠો હોય છે, પૃષ્ઠના છેડા (હદ) લીટીઓ હોય છે, અને લીટીના છેડા બિંદુઓ હોય છે.

પૃષ્ઠને લંબાઈ હોય છે કે ? “હા.” પહોળાઈ હોય છે કે ? “હા.” જડાઈ હોય છે કે ? “ના.” (જડાઈ હોય છે એવો ઉત્તર કોઈ આપે તો નીચેનો પ્રયોગ કરીને ચોખ્ખો જવાબ કઢાવવો.)

(૧) આ તપેલામાંના પાણીનો પૃષ્ઠભાગ જુઓ. આ પૃષ્ઠ તપેલાના અંદરના ભાગને અડકેલું છે કે ? “હા.” આ પૃષ્ઠ જ્યાં (તપેલાની બાજુને) અડકે છે તેની નીચે બધું પાણીજ છે અને ઉપર બધી હવાજ છે; માટે આ પૃષ્ઠ પાણી અને હવાની વચ્ચે છે. જ્યાં પાણી પુરું થાય છે ત્યાં હવા શરૂ થાય છે; તો આ પૃષ્ઠને કંઈ જડાઈ હોવાનો સંભવ છે ?

(૨) એક સીસીમાં તેલ અને પાણી ભરવાં; અને જ્યાં પાણી પુરું થાય છે ત્યાં તેલ શરૂ થાય છે, એ વાત બતાવીને, પૃષ્ઠને જડાઈ નથી એ વાત સ્પષ્ટ કરવી.

એક લાકડાનું પાટીઉં ઘસાતાં ઘસાતાં એટલું ઘસાયું, કે

તેને જડાઈ નામની પણ ખીલકુલ રહી નહિ; એવી આપણે કલ્પના કરીએ, તો તેનો લંબાઈ પહોળાઈવાળો જે ભાગ રહ્યો તે પૃષ્ઠ છે; અર્થાત્ એને જડાઈ નથી.

જમીનનું ક્ષેત્રફળ કાઢતી વખતે તેની ફક્ત લંબાઈ અને પહોળાઈનો જ વિચાર કરવો પડે છે; જડાઈનો ખીલકુલ વિચાર કરવો પડતો નથી. આ કેસાણે જમીનના સંબંધમાં જે વાત ધ્યાનમાં લેવી પડે છે, તેનેજ પૃષ્ઠ કહેવું.

છાયાને લંબાઈ અને પહોળાઈ હોય છે, પણ જડાઈ હોતી નથી; માટે છાયા એ પૃષ્ઠનો એક ઘણોજ સારો દાખલો ગણી શકાય.

વસ્તુ અને આકાશ એ બે વચ્ચેની હદ એ તે વસ્તુનું પૃષ્ઠ છે.

પૃષ્ઠને પરિમેય કેટલાં? “એ.” પૃષ્ઠના છેડા કઈ આકૃતિ જેવા દેખાય છે? “લીટી જેવા.”

વર્તુળ, પરિધ, વ્યાસ, ક્રૌંસ, અને જ્યાં એમને પરિમેયો કેટલાં? પાતળા કાગળનો કડકો, છાયા, અને કાગળને લગાડેલા રંગનો થર એ પૃષ્ઠો કહેવાય કે ?

પૃષ્ઠની વ્યાખ્યા:—પૃષ્ઠને ફક્ત લંબાઈ અને પહોળાઈ હોય છે, પણ જડાઈ ખીલકુલ હોતી નથી.

સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠ.

સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠ વચ્ચે શો તફાવત છે? એ સપાટ પૃષ્ઠ (દાખલા તરીકે, ધનની કે ઈંટની બાજુ) એકમેકને લગાડો. પછી એ વક્ર પૃષ્ઠો (દડાની કે નળાકારની બાજુ) એકમેકને લગાડો. એ સપાટ પૃષ્ઠો એક બીજા પર મૂકીને તેમને એક બીજા પર (ઘંટીના પડની માફક) જુદી જુદી દિશામાં ફેરવો. એ વક્ર પૃષ્ઠોને એક બીજા પર મૂકીને તેજ પ્રમાણે ફેરવો. આ બે બાબતોમાં શો ફરક જણાય છે? “સપાટ પૃષ્ઠો એક બીજા પર મૂક્યાં હોય, તો તે એક

ખીજ સાથે બરાબર મળી જાય છે, તેમની વચ્ચે અંતર રહેતું નથી; અને વક્ર પૃષ્ઠો એક ખીજ પર મૂક્યાં હોય તો તેમની વચ્ચે કેટલુંક અંતર રહે છે.”

સપાટ પૃથ્વ પર ગમે ત્યાં બે બિંદુ લો. તેમને સાંધનારી લીટી દ્વારા વડે દર્શાવો. (બિંદુઓની જગાએ ટાંકણીઓ ખોસવી, અને તેમાંની એક ટાંકણીથી ખીજ ટાંકણી સુધી દ્વારો તાણી બાંધીને સીધી લીટી દર્શાવવી.) આ લીટી પૃથ્વમાં રહે છે કે પૃથ્વની બહાર રહે છે ? વાંકા અને ઉંડા પૃથ્વ ઉપર બે બિંદુ લો. તેમને સાંધનારી લીટી દ્વારાથી દર્શાવો. (પહેલાંની માફક બિંદુની જગાએ ટાંકણીઓ ખોસવી, અને એક ટાંકણીથી ખીજ ટાંકણી સુધી દ્વારો તાણી બાંધીને સીધી લીટી દર્શાવવી.) તે (આખી) લીટી પૃથ્વમાંજ રહે છે, કે પૃથ્વની બહાર રહે છે ? વક્ર પૃથ્વમાં બે બિંદુઓ ગમે ત્યાં લીધાં હોય, તો તેમને સાંધનારી સીધી લીટી હંમેશાં તે પૃથ્વમાં રહે છે કે ?

આ પરથી સપાટ પૃથ્વ અને વક્ર પૃથ્વની વચ્ચે તમને શો તફાવત જણાય છે ? દડાના કે નળાકારના પૃથ્વ પર ગમે ત્યાં બિંદુ લીધાં હોય, તો તે બિંદુઓને સાંધનારી સર્વ લીટીઓ સીધી હશે કે ? “ ના. ”

સપાટી.

કોઈ પૃથ્વ સીધું કે સપાટ હોય તો તે એક સપાટીમાં છે એમ કહેવાય છે.

કોઈ પૃથ્વ બધી દિશાઓમાં એકજ સીધી લીટીમાં વધારું હોય, તો તે જે જગા રોકે છે, તે તે પૃથ્વની સપાટી છે.

ઓછીવત્તી લંબાઈની ત્રણ લાકડીઓ ભોંયમાં ખોસવી. તેમના ઉપલા છેડા બિંદુઓ છે એમ ધારવાને છોકરાઓને કહેવું. તે લાકડીઓની (ટોચ) ઉપર મોટું પાટીકું આડું

મૂકવું, એટલે લાકડીઓના છેડાથી દર્શાવાતી બિંદુઓની સપાટી પાટીઆથી દર્શાવાશે. આ પ્રયોગ જુદી જુદી રીતે ત્રણ ચાર વખત કરવો.

સપાટીનું લક્ષણ એવું છે, કે તેમાં ગમે તે બે બિંદુ લઈને તેમની વચ્ચે બે સીધી લીટી દોરી હોય, તો તે આખી લીટી તે સપાટીમાં રહે છે. (તે સીધી લીટીનો કોઈ પણ ભાગ તે સપાટીની બહાર થઈને જાય તો તે સપાટીજ નથી.)

સપાટી નક્કી કરવા માટે ઓછામાં ઓછાં કેટલાં બિંદુ જોઈએ ? “ ત્રણ. ”

ચોપડીની છ બાજુમાંથી કઈ બાજુઓ એકજ સપાટીમાં હોય છે ? દાબડીની કઈ બાજુઓ એકજ સપાટીમાં હોય છે ?

ત્રણથી વધારે નાની મોટી લાકડીઓ ભોંયમાં ખોસવી, અને તેમના પર પાટીઉં આડું મૂકવું; એટલે એમ જણાઈ આવશે કે તે પાટીઉં જુદી જુદી સ્થિતિમાં કેટલીક સળીઓના છેડાને અડકે છે અને કેટલીકના છેડાને અડકતું નથી. આ ઉપરથી તે બધા છેડા એક સપાટીમાં નથી એ નક્કી થશે. ગમે તે ત્રણ લાકડીના છેડા પર પાટીઉં મૂકીને, તે છેડાથી દર્શાવેલાં બિંદુઓની સપાટીમાં બીજા છેડા આવે એટલા માટે તેમને કેટલા ઉપર નીચે કરવા જોઈએ, એ છોકરાંને પૂછવું; એટલે તેમને સપાટીનો ખરાબર ખ્યાલ આવશે.

મેજ પરના પાટીઆની સપાટીમાં આસપાસની ભીંતના અને બીજી ચીજોના જે ભાગ છે તે દેખાડો.

ધારો કે મેજના બે પાયા નીચે પથ્થર મૂકવાથી મેજ ત્રાંસું થયું છે. હવે મેજ પરના પાટીઆની સપાટીમાં આસપાસની ભીંતના અને બીજા પદાર્થના જે ભાગ આવે છે તે બતાવો.

એકાદ પાટીઉં જુદી જુદી રીતે પકડીને તેની સપાટીમાં આવતા ભીંતના ભાગ બતાવવાને કહેવું. ભીંત ઉભી સપાટીમાં છે કે નહિ, એ આપણે શી રીતે જોઈ શકીશું ?

એક કાચનું પ્યાલું પાણીથી ભરો. પાણીના પૃષ્ઠની સપાટી કઈ ? આ કાંઈ બીજી એક સપાટી છે એમ ધારો. કાંઈ પાણીમાં ત્રાંસું બોજો. આપણે જોઈએ છીએ કે કાંઈની સપાટી પાણીના પૃષ્ઠને છેદે છે. આ બે સપાટી જ્યાં એકમેકને છેદે છે ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે ? “ લીટી. ”

એક વક્ર અને એક સીધું, અથવા બંને વક્ર પૃષ્ઠો એકમેકને જ્યાં છેદે છે, ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે ? “ લીટી. ” તે કદી પણ સીધી લીટી હોય છે કે ? “ ના. તે વાંકી લીટી હોય છે. ”

લીટી.*

કાળા પાટીઆ પર પટ્ટી મૂકવી. પટ્ટીની બાજુએ ચાકની અણી પાટીઆ પર ધીમેથી દાબવી; એટલે પાટીઆ પર બિંદુ પડશે. પછી ચાક વચ્ચે વચ્ચે ઉપાડીને ખસેડતાં ખસેડતાં પાટીઆ પર ટપકાંની લીટી કરવી. આ ટપકાં વચ્ચેની ખાલી જગામાં બીજાં ટપકાં મૂકવાં, એટલે પહેલાંનાં ટપકાં વચ્ચેનું અંતર ઓછું થશે. એવી રીતે વારંવાર ટપકાં ઉમેર્યાં હોય, તો તે બધાં એકમેકમાં મળી જઈને લીટી તૈયાર થશે. એ પ્રમાણે પ્રયોગ કરીને ટપકાં ટપકાં મળીને લીટી તૈયાર થાય છે આ વાત § કઢાવવી.

* આ ભાગમાં સીધી લીટી અને વક્ર લીટી વચ્ચેના તફાવતના સંબંધમાં વિચાર કર્યો છે; તેથી પહેલાંના સંકેત પ્રમાણે આ ભાગમાં લીટી એ શબ્દનો અર્થ સીધી લીટી એમ ન લેતાં સાધારણ અર્થ લેવો.

§ એ વાત ફક્ત સ્થૂળ રીતે જોતાં ખરી છે, એ યાદ રાખવું. શાસ્ત્રની દૃષ્ટિથી એમ કહેવું બરાબર નથી.

કાળા પાટીઆ પર બે બિંદુ લેવાં, અને તેમની વચ્ચે એક સીધી લીટી, અને કેટલીક વાંકી લીટીઓ દોરવી. પાણીમાં દોરો પલાળીને, દોરો લીટીઓની ઉપર પાથરીને, સર્વ લીટીઓની લંબાઈ માપવી. કઈ લીટી સૌથી ટુંકી છે ? આ લીટી સીધી છે કે વાંકી ? “સીધી.” આના કરતાં ટુંકી લીટી આ બે બિંદુઓની વચ્ચે દોરો. દોરી શકાય છે ? “ના.” આ પરથી સીધી લીટીનો કયો ધર્મ જાણવામાં આવે છે ? મુકરર અંતર પરનાં બે બિંદુઓની વચ્ચે બે કેટલીક લીટીઓ દોરી હોય, તો તેમની લંબાઈ પરથી સીધી લીટી કઈ છે તે જાણી શકાશે ?

કાળા પાટીઆ પર બે બિંદુ લો. તે પર (બે) ચુંકો ડોકો. આ ચુંકો વચ્ચે એક દોરો તાણીને બાંધો. આ દોરાથી લાંબા દોરા લઈને તેમના છેડા આ ચુંકો વચ્ચે બાંધો. પહેલા દોરાથી અને બીજા દોરાથી જે લીટીઓ બને છે, તેમાંની કઈ લીટી સીધી લીટી જેવી દેખાય છે ? આ પરથી બે બિંદુઓ વચ્ચે બે એક સીધી લીટી અને બીજી કેટલીક વાંકી લીટીઓ દોરી હોય, તો તે પૈકી સૌથી ટુંકી લીટી કઈ હોય છે, એ વિષે શું સમજાય છે ?

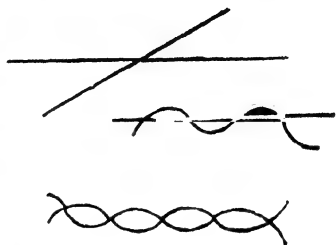
બે બિંદુ લો. તેમને સાંધનારી એક સીધી લીટી કાઢો. તેજ બિંદુઓને સાંધનારી બીજી એક સીધી લીટી દોરો. આ લીટી પહેલી લીટીથી જુદી છે કે ? “ના.” આ બે બિંદુઓ વચ્ચે તમે બીજી કોઈ સીધી લીટી દોરી શકશો ? “ના.” આ ઉપરથી સીધી લીટીનો બીજો કયો ધર્મ જાણાઈ આવે છે ?

કાળા પાટીઆ પર બે બિંદુ લો. તેમના પર ચુંકો મારો. તેમની વચ્ચે એક દોરો ખેંચીને બાંધો. બીજા બે ત્રણ દોરા તેવીજ રીતે તાણીને બાંધો. તે દોરા એકજ સ્થાનમાં પડે છે, કે જુદાં જુદાં સ્થાનમાં પડે છે ? આ પરથી બે બિંદુ-

ઓની વચ્ચે જુદી જુદી સીધી લીટીઓ કેટલી કાઢી શકાશે, એ વિષે શું જણાય છે ? “એક બિંદુથી બીજા બિંદુ સુધી એકજ સીધી લીટી કાઢી શકાય છે.”

એક સીધી લીટી દોરો.

તેને છેદનારી બીજી એક સીધી લીટી દોરો. એક વાંકીચુંકી લીટી લો. તેને વધારેમાં વધારે બિંદુઓમાં છેદનારી બીજી સીધી



અથવા વાંકી લીટી (આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે) દોરો. એ સીધી લીટીઓ એક બીજીને કેટલાં બિંદુઓમાં છેદે છે ? “એક.” વાંકી લીટીઓ એક બીજીને કેટલાં બિંદુમાં છેદે છે ? “એકથી વધારે બિંદુઓમાં.”

એકથી વધારે બિંદુઓમાં એક બીજીને છેદનારી એ સીધી લીટીઓ દોરી શકાય કે ? “ના.” આ પરથી સીધી લીટીનો કયો ધર્મ સમજાય છે ? “એ સીધી લીટીઓ એક બીજીને એકથી વધારે બિંદુઓમાં છેદતી નથી.”

એ સીધી સળા લો, અને તેમની મદદથી કોઈ જગાને ઘેરી લેવાનો પ્રયત્ન કરો. જગા ઘેરી લઈ શકાય છે કે ? “ના.”

એ સીધી લીટી દોરો, અને તેમનાથી કોઈ જગા ઘેરી લેવાનો પ્રયત્ન કરો. તેમ કરી શકાય છે કે ? “ના.” એ વાંકી લીટીઓ લઈને તેમના વડે કોઈ જગા ઘેરી લેવાનો પ્રયત્ન કરો. ઘેરી શકાય છે કે ? “હા.” આ પરથી સીધી લીટી અને વાંકી લીટી વચ્ચે શો તફાવત જણાય છે ? “એ સીધી લીટી જગા ઘેરી શકતી નથી.”

એક આંખ મીચો, અને ઉઘાડી આંખ આગળ એક સીધી

સળી અથવા એકાદ પાટીઆનો સીધો છેડો એવી રીતે ધરો, કે તેના બંને છેડા અને આંખ એકજ સીધી લીટીમાં આવે. પછી એજ રીતે વાંકી સળી, લીટી, કે પાટીઆની વાંકી ધાર જુઓ. શો ફરક જણાય આવે છે ?

એક સીધી અને ત્રણ ચાર વાંકી લીટી લો. છેક પાતળા કાગળના અથવા ટ્રેસિંગ પેપરના જુદા જુદા કડકા પર તે લીટીઓની છાપ પાડો (નકલ પડે એમ કરો). એમાંથી દરેક કડકાને એવી રીતે વાળો કે તે પરની લીટીના ચાર ભાગ થાય. પછી દરેક લીટીના ગમે તે ભાગ પર, તેજ લીટીની છાપના ચાર ભાગમાંથી દરેક ભાગ મૂકીને તે નીચેની લીટી પર બરાબર આવી રહે છે કે કેમ તે જુઓ. કાગળના કડકા ઉથલાવીને તેજ પ્રયોગ કરો. સીધી લીટી અને વાંકી લીટી વચ્ચે આ પ્રયોગ પરથી શો ફરક જણાય છે ? “સીધી લીટીનો કોઈ પણ ભાગ તેના બીજા કોઈ પણ ભાગ પર મૂક્યો હોય, તો તે તે પર બરાબર આવી રહે છે; પણ વાંકી લીટીઓનું એમ થતું નથી.”

વ્યાખ્યા:—કોઈ પણ લીટીનો ગમે તે ભાગ (ઉલટાવ્યો હોય તોપણ) ઉંચકીને તેજ લીટીના બીજા કોઈ પણ ભાગ પર (બંને ભાગો એકજ દિશામાં રહે એવી રીતે) મૂક્યો હોય, ને તે તે પર બરાબર એસે, તો તેને **સીધી લીટી** કહે છે.

કોઈ સીધી લીટીમાંનું એક બિંદુ આપ્યું હોય, તો તે બિંદુ પરથી તે લીટી કઈ દિશામાં જાય છે તે કહી શકાય કે ? “ ના. ” ત્યારે કોઈ સીધી લીટી કઈ દિશામાં જાય છે, તે નક્કી કરવા માટે તે લીટીમાંનાં ઓછામાં ઓછાં કેટલાં બિંદુ જાણવાની જરૂર છે ? “ બે. ”

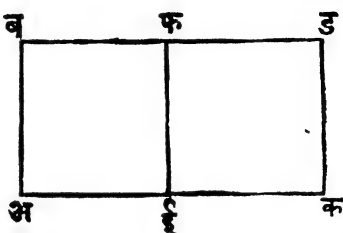
આપેલાં બે બિંદુ વચ્ચે સીધી લીટી શી રીતે દોરશો ?

આપેલી લીટીઓમાંથી સીધી કઈ અને વાંકી કઈ, એ તેમની વચ્ચે દોરો તાણી બાંધીને શી રીતે કહેશો ?

કોઈ ખેતરમાં એક ઝાડથી બીજા ઝાડ સુધી દોરીની મદદથી સીધી લીટી કેવી રીતે કાઢશો ?

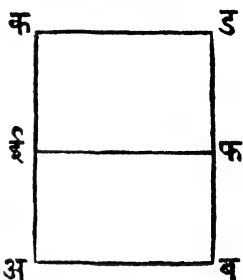
અબડક એક વીસ ઇંચ લાંબો અને દસ ઇંચ પહોળો કાગળનો કડકો છે.

એને બરાબર વચ્ચેથી વાળ્યો હોય, તો તેના જે બે ભાગ થશે તે આકૃતિથી દર્શાવવા છે. તે દર્શાવવા માટે પાસે



દોરેલી છે તેવી આકૃતિ દોરી છે, એમ ધારો. આ આકૃતિમાં **ઈફ** લીટી શું દર્શાવે છે ? “ અબડક કાગળના કડકાને દુભાગનાર સળની જગા. ” **ઈફ** લીટીની દિશામાં એક આગળ એક, એમ લીટીઓ દોરીને **ઈફ** અને અબ વચ્ચેની જગા પૂરી દો. એવી કેટલી લીટીઓ દોરી શકાય ? ધારો કે દસ લીટીઓ દોરી શકાય છે. જે દસ લીટીઓ વડે **ઈથી** અ સુધીની જગા પુરાઈ જાય, અને **ઈથી** અ સુધીનું અંતર ૧૦ ઇંચ હોય, તો દરેક લીટી કાગળની કેટલી લંબાઈ દર્શાવે છે ? “ એક ઇંચ. ” જે દરેક લીટી કાગળનો એક ઇંચ પહોળો કડકો દર્શાવે છે, તો **ઈફ** લીટી જે સળ બતાવે છે, તે સળ ખરેખર એક ઇંચ પહોળો છે કે ? તેની ખરી પહોળાઈ કેટલી ? સળે સળે કાગળ કાપ્યો હોય, તો સળની પહોળાઈ કાગળના કયા ભાગમાં જશે ? તે કોઈ પણ ભાગમાં ન જાય એવી રીતે કાગળ કાપી શકાશે કે નહિ ? “ કાપી શકાશે. ” ત્યારે સળને પહોળાઈ છે કે ? “ ના. ” સળને જે પહોળાઈ નથી, તો **ઈફ** લીટીને પહોળાઈ શા માટે છે ?

અવલક એક ખેતર છે, અને તે ક્ષ અને જ્ઞ એ બે ભાઈઓને વહેંચી લેવું છે. તેમણે તેના અવલક અને રૂંધક એવા બે સરખા ભાગ કર્યા, અને દરેક જણે એકેક ભાગ લીધો. ધારો કે ક્ષને ભાગે દક્ષિણ તરફનો કકડો આવ્યો, અને જ્ઞને ભાગે ઉત્તર તરફનો કકડો આવ્યો. અ

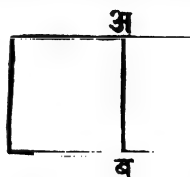


આ બે કકડા પાસેની આકૃતિમાં બતાવ્યા છે. તેમની વચ્ચે કંઈ જગા છે કે? “ના.” છે એમ જો તમે કહો, તો તે બે ભાઈઓમાંથી કોને ભાગે આવી છે, એ તમારે કહેવું જોઈએ. બે કકડાની વચ્ચે જો જગા નથી, તો રૂંધ લીટી દોરી છે તે શા માટે? તે લીટી ખેતરનો કયો ભાગ દર્શાવે છે? “કોઈ પણ નહિ.” રૂંધ લીટીની નીચે અવ લીટી સુધી એકમેકને અડકાડીને એક પછી એક લીટીઓ દોરો. ધારો કે એવી વીસ લીટીઓ રૂંધથી અવ સુધીની જગા ભરી કાઢે છે. હવે જો વીસ લીટીઓ વડે રૂંધથી અ સુધીની જગા રોકાઈ જાય, અને રૂંધની લંબાઈ જો વીસ ફુટ હોય, તો દરેક લીટી કેટલી જગા દર્શાવે? “એક ફુટ પહોળી.” રૂંધ લીટી એક ફુટ પહોળી જગા દર્શાવે, તો એ કકડો (રૂંધ લીટીથી દર્શાવાતી એક ફુટ પહોળી અને ... ફુટ લાંબી જગા) કોનો? ક્ષના અને જ્ઞના ભાગના કકડાઓની વચ્ચે જો જગા રાખવાનું કારણ નથી, તો રૂંધ લીટી શા માટે દોરી છે? “.....” જો આ લીટી જગા દર્શાવતી નથી, તો તે ખરેખર શું દર્શાવે છે? “ક્ષની જમીન ક્યાં પુરી થાય છે, અને જ્ઞની જમીન ક્યાં શરૂ થાય છે, તે તે દર્શાવે છે.”

ત્યારે લીટી ખરેખર જગા દેખાડે છે, કે હદ ? “હદ.”

એ છેક લીસા ધન લઈને એક બીજાને ખરાબર અડકાડીને મૂક્યા હોય, તો તેમનું ચિત્ર આપણે

શી રીતે દોરીશું ? પાસે દોરેલી આકૃતિ જુઓ. આ આકૃતિમાં



અબ લીટી કાગળ પર કેટલીક

જગા રોકે છે, એ કારણથી શું આપણે એ ધનની વચ્ચે કેટલીક જગા છે એમ ધારી શકીએ ? “ના.” ત્યારે આ લીટી શા માટે દોરી છે ? આ લીટી ક્ષેત્રજ્ઞ દેખાડે છે કે હદ ? “હદ.”

એક કાગળના કેટલાક ભાગને કાળો કે બીજો કોઈ રંગ લગાડ્યો હોય, તો તે રંગેલો ભાગ અને બાકીનો ઘોળો ભાગ એમની વચ્ચેની હદનો રંગ શો ? તેને જો રંગ નથી, તો હદ દેખાડનારી લીટીની પહોળાઈ કેટલી ? આ લીટીને પહોળાઈ હોઈ શકે કે ? “ના.”

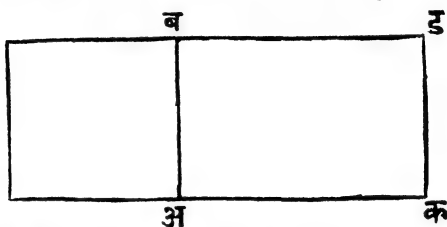
ઉપલા દાખલામાં એ ધન જ્યાં એક બીજાને મળે છે, અથવા જ્યાં ખેતરના એ ભાગ એક બીજાને મળે છે, તે જગાને પહોળાઈ છે કે ? “ના.” લંબાઈ છે કે ? “છે.” આ જગા દેખાડવાને આપણે જે લીટી દોરીએ છીએ, તેને સહેજસાજ તો પહોળાઈ છેજ. પણ મૂળ જગાને પહોળાઈ ન હોય તો તે જગા દર્શાવનારી લીટીને પહોળાઈ શા માટે રાખવી ? પહોળાઈ રાખ્યા વગર તે લીટી દોરી શકાશે કે ? “ના.” એવી લીટી કઢી શકાય નહિ, તેથી આપણે લીટીને પહોળાઈ રાખીએ છીએ. બાકી ખરેખર જેતાં લીટીને પહોળાઈ હોતી નથી.*

* પાસે દેખાડેલી આકૃતિ એક ખેતરનો નકશો છે. ધારો કે

લીટી દોરવાનો હેતુ—કોઈ પદાર્થ ક્યાં શરૂ થાય છે, તે ક્યાં પુરો થાય છે, તેનો આકાર કેવો છે, અથવા તે કઈ દિશા તરફ વધે છે એ દેખાડવા માટે આપણે લીટી દોરીએ છીએ.

તેથીજ, જેને લંબાઈ છે પણ (ખરી) પહોળાઈ નથી તે **લીટી**, એવી લીટીની વ્યાખ્યા આપવામાં આવે છે.

તેમાં બ આડથી
બ આડ સુધી
એક કરોળીઆ-
એ પોતાનો
તાંતણો તાણ્યો
છે. હવે ખેતરના



નકશાનું સ્કેલ આપ્યું હોય, તો કરોળીઆના તાંતણાની લંબાઈ કેટલી છે તે કહી શકશો ? ધારો કે તે સ્કેલ $1'' = 10'$ છે; તો તે તાંતણાની લંબાઈ શી રીતે નક્કી કરશો ? “ અબ લંબાઈ માપો. તે જેટલા ઇંચ ભરે તેને ૧૦એ ગુણો. જવાબ આવે તેટલા ફુટ સમજવા. ” અબ લીટીને કંઈ પહોળાઈ છે કે ? “ ના. ” એમ કદાચ તમે કહશો. અબથી આકૃતિના છેડા સુધી એક ખીજને અડકી રહે એવી લીટીઓ દોરો. ધારો કે એવી ૧૨૦ લીટી અબથી કઈ સુધીની જગા ભરી કાઢે છે. હવે જો અંધી ક સુધીનું અંતર ૧૦ ફુટ હોય, તો દરેક લીટીની પહોળાઈ $\frac{10 \times 12 = 120}{120} = 1$ ઇંચ અંતર દર્શાવે છે. જે લીટી કરોળીઆનો

તાંતણો દર્શાવે છે, તે જો એક ઇંચ પહોળાઈ દર્શાવે, તો કરોળીઆના તાંતણાની પહોળાઈ (જડાઈ) ૧ ઇંચ છે એમ નથી થતું કે ? જો લીટીની લંબાઈ પરથી તાંતણાની લંબાઈ નક્કી કરવાની હોય, તો તેની પહોળાઈ પરથી તાંતણાની પહોળાઈ (જડાઈ) શા માટે નક્કી ન કરવી ? જેથી તાંતણાની પહોળાઈ (એટલે જડાઈ) બરાબર દર્શાવી શકાય એવી લીટી દોરો. “ એવી લીટી કાઢી શકાતી નથી. ” ત્યારે લીટીને પહોળાઈ નથી એમ માનવાની ખાસ જરૂર છે ? “ હા. ”

વાળ અથવા ઝીણો દોરો એ લીટી છે કે ? “ ના. ”
કારણ કહો. અક્ષાંશવૃત્તો, રેખાંશવૃત્તો,.....વગેરે લીટીઓ
છે કે ? કારણ કહો. લીટીને લંબાઈ, પહોળાઈ, જડાઈ,
એમાંથી ક્યાં પરિમેયો હોય છે ? “ લંબાઈ. ” ત્યારે હવે
લીટીને કેટલાં પરિમેયો હોય છે ? “ એક. ”

ખિંદુ.

એક ખીજને છેદતી બે લીટી દોરો. આ લીટીઓ એક
ખીજને જે ભાગમાં છેદે છે, તે ભાગ સિવાય બાકીનો બધો
ભાગ ભૂંસી નાખો. જે ભાગ રહ્યો છે તે જુઓ, અને બે
લીટીઓ એક ખીજને જ્યાં છેદે છે ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય
છે તે કહો. “ ખિંદુ. ”

એક દશાંશ ઇંચ પહોળા બે લીટીઓ એક ખીજને છેદે,
તો તે જે ખિંદુમાં (એટલે જગામાં) છેદે છે, તે ખિંદુની
લંબાઈ પહોળાઈ કેટલી ? “ એક દશાંશ ઇંચ. ”

એક વીસાંશ ઇંચ પહોળા બે લીટીઓ એક ખીજને છેદે,
તો તે જે ખિંદુમાં છેદે છે તે ખિંદુની લંબાઈ અને પહોળાઈ
કેટલી ? “ એક વીસાંશ ઇંચ. ”

હવે જો લીટીને ખરેખર પહોળાઈ નથી, તો બે લીટીઓ
એક ખીજને જે ખિંદુમાં છેદે છે તે ખિંદુની લંબાઈ પહોળાઈ
કેટલી ? “ બીલકુલ નહિ. ”

બે લીટીઓ એક ખીજને જ્યાં છેદે છે, ત્યાં ખિંદુ બને
છે. લીટીને ખરી પહોળાઈ હોતી નથી, માટે ખિંદુને પણ
લંબાઈ પહોળાઈ હોતી નથી. એમ છતાં ખિંદુ અમુક સ્થાનમાં
હોય છે, તેથી તેને સ્થાન કે સ્થિતિ હોય છે.

તથી, ‘ જેને સ્થિતિ છે પણ મહત્ત્વ નથી તે ખિંદુ, ’
એવી ખિંદુની વ્યાખ્યા આપવામાં આવે છે.

પૃથ્વીના ધ્રુવ, સોયની અણી, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, ગુરુત્વ-મધ્યબિંદુ, ખુણાનું શિરોબિંદુ.....એ પૈકી બિંદુ ક્યાં છે અને ક્યાં નથી ?

પહોળાઈ વગરની લીટી, અને લંબાઈ અને પહોળાઈ વગરનું બિંદુ, કાઠવાં અશક્ય છે; માટે જે બિંદુ અને લીટીઓ આપણે કાઢીએ છીએ, તેમને ઉપલી વ્યાખ્યા પુરેપુરી લાગુ પડતી નથી.

બિંદુ આગળ ખસતું ગયું એવી કલ્પના કરીએ, એટલે લીટી બને છે; લીટી લંબાઈની સાથે ખુણો કરીને ખસતી ગઈ એવી કલ્પના કરીએ, એટલે પૃષ્ઠ બને છે; અને પૃષ્ઠ લંબાઈ અને પહોળાઈ જોડે ખુણો કરીને વધતું ગયું એવી કલ્પના કરીએ, એટલે ધનાકૃતિ બને છે.



નવી ભૂમિતિ ભાગ ૧.



ખંડ બીજો.

(પ્રમેય-સિદ્ધાંત.)

કેટલીક પારિભાષિક સંજ્ઞાઓનો અર્થ.

(નીચેનું સ્પષ્ટીકરણ દેવકુળેકૃત યુક્તિલક્ષ્યાંથી લીધું છે.)

સિદ્ધાંત—જે શબ્દસમૂહમાં (૧) કંઈ સત્ય સિદ્ધ કરેલું હોય છે, અથવા (૨) કંઈ રચના કરી બતાવેલી હોય છે, તે શબ્દસમૂહને **સિદ્ધાંત** કહે છે.

પ્રમેય અને **કૃત્ય**—ઉપર સિદ્ધાંતના લક્ષણમાં જે બે પ્રકારના શબ્દસમૂહ કહ્યા, તેમાંથી પહેલાને **પ્રમેય** કહે છે, અને બીજાને **કૃત્ય** કહે છે.

ઉપસિદ્ધાંત—જે સિદ્ધાંત બીજા કોઈ સિદ્ધાંતમાંથી એમ ને એમ નીકળે છે, અથવા જે તેની મદદથી ટુંકામાં સિદ્ધ થાય છે, તેને તે સિદ્ધાંતનો **ઉપસિદ્ધાંત** કહે છે.

પ્રતિજ્ઞા—અમુક એક અથવા વધારે બાબતો આપેલી છે અને અમુક એક બાબત સિદ્ધ કરવી છે, એવું જે શબ્દસમૂહમાં જણાવેલું હોય છે, તેને **પ્રતિજ્ઞા** કહે છે. જેમ કે;—
“ સમબાળુ ત્રિકોણ સમકોણ હોય છે. ”

પક્ષ અને **સાધ્ય**—કોઈ પણ સિદ્ધાંતમાં જે (એક કે વધારે) બાબતો આપેલી હોય છે, તે બધી એકઠી મળીને તે સિદ્ધાંતમાંનો **પક્ષ** કહેવાય છે; અને જે બાબત સિદ્ધ કરવાની હોય છે, અથવા જે એક કૃતિ કરવાની હોય છે, તે તે સિદ્ધાંતમાંનું **સાધ્ય** કહેવાય છે.

વ્યત્યાસ—કોઈ પણ સિદ્ધાંતમાંના પક્ષને બદલે, અથવા પક્ષમાં અનેક બાબતો હોય તો તેમાંથી કોઈ એક બાબતને બદલે, તેમાંનું સાધ્ય મૂક્યું હોય; અને સાધ્યને બદલે પક્ષ

અથવા પક્ષમાંની પેલી એક બાબત મૂકી હોય, તો એવી રીતે જે સિદ્ધાંત થાય છે તેને મૂળ સિદ્ધાંતનો વ્યત્યાસ કહે છે. જેમકે:—“ સમખાણુ ત્રિકોણુ સમકોણુ હોય છે. ” આ મૂળ સિદ્ધાંત ગણ્યો હોય, તો “ સમકોણુ ત્રિકોણુ સમખાણુ હોય છે, ” એ તેનો વ્યત્યાસ થાય. “ જે સંખ્યામાંના આંકડાનો સરવાળો ત્રણુ વડે પુરેપુરી રીતે ભાગી શકાય છે, અને જેના એકમના સ્થાનમાં શૂન્ય હોય છે, તે સંખ્યા છ વડે પુરેપુરી રીતે ભાગી શકાય છે; ” આ મૂળ સિદ્ધાંત ગણ્યો હોય, તો “ જે સંખ્યામાંના આંકડાનો સરવાળો ત્રણુ વડે પુરેપુરી રીતે ભાગી શકાય છે અને આખી સંખ્યા પુરેપુરી રીતે છ વડે ભાગી શકાય છે, તેના એકમના સ્થાનમાં શૂન્ય હોય છે; ” આ તેનો વ્યત્યાસ થાય.

સૂચના—(૧) આગળના પ્રમેયોમાં જે રચનાની જરૂર પડશે, તે આ પુસ્તકના પહેલા પ્રકરણમાં કહ્યા પ્રમાણે કરવાની છે. આ રચનાને ત્રીજા ખંડમાં આપેલા કૃત્યસિદ્ધાંતોની જરૂર નથી. કૃત્યોમાં રચના કરવાની રીત ઉપરાંત રચનાની સિદ્ધતા આપેલી હોય છે, પરંતુ આ સિદ્ધતાની પ્રમેયોને જરૂર નથી; કારણ કે પ્રમેયોને જરૂરની રચના બરાબર છે એમ ધારી લીધું હોય તોપણ ચાલે; માત્ર એ રચના કરવી શક્ય હોવી જોઈએ; નહિ તો (આ રચના પર આધાર રાખતી) સિદ્ધતા ખોટી ઠરશે. આ કારણને લીધે નવી ભૂમિતિમાં કૃત્યોના પહેલાં પ્રમેયો શીખવી શકાય છે.

(૨) નવી ભૂમિતિમાં સર્વ આકૃતિઓ બરાબર કાઢવાની બહુ જરૂર છે, એ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ.

સંક્ષેપચિહ્નોનો અર્થ.

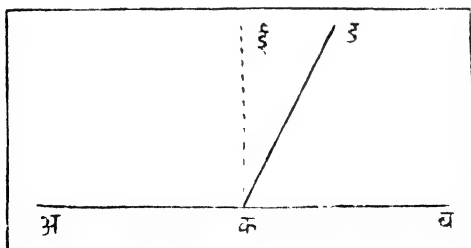
- + એટલે વત્તા. — એટલે ઓછા.
 = એટલે ની બરાબર. || એટલે સમાંતર.
 > એટલે થી મોટો. < એટલે થી નાનો.
 ∴ એટલે માટે, તેથી. ∵ એટલે કારણ કે.
 ⊥ એટલે ખુણા. Δ એટલે ત્રિકોણ.
 ○ એટલે વર્તુળ. □ એટલે સમાંતરબાહુ ચતુષ્કોણ.

≡ એટલે એકરૂપ (બધી રીતે સરખા) છે.

પ્ર૦ એટલે પ્રમેય. કૃ૦ એટલે કૃત્ય.

પ્રમેય ૧.

એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટી પર પડે, તો તે બીજી લીટીની એક બાજુએ જે પાસપાસેના બે ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે.



પક્ષ—કે સીધી લીટી અથવા સીધી લીટી પર પડે છે.

સાધ્ય— \angle અકક + \angle બકક = ૨ કાટખુણા.

અવ પર ડક લંબ હોય, તો \angle અકડ+ \angle બકડ=૨ કાટખુણા એ સિદ્ધ છે. પરંતુ અવ પર ડક લંબ ન હોય તો—

રચના—અવ પર કઈ લંબ દોરો.

સિદ્ધતા— \angle અકડ= \angle અકઈ+ \angle ઈકડ. (પ્રત્યક્ષ.)

\angle બકડ= \angle બકઈ- \angle ઈકડ. ”

$\therefore \angle$ અકડ+ \angle બકડ= \angle અકઈ+ \angle બકઈ.

પણ અકઈ+બકઈ=૨ કાટખુણા. (રચના.)

$\therefore \angle$ અકડ+ \angle બકડ=૨ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત—એક બિંદુમાંથી અનેક લીટીઓ દોરી હોય, તો તે લીટીઓ વચ્ચે થતા સર્વ ખુણાનો સરવાળો ૪ કાટખુણા બરાબર હોય છે.

૧ લા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અમવ અને કમડ આ બે લીટીઓ એક બીજીને મ બિંદુમાં છેદે છે, અને અમક કાટખુણો છે; તો મ બિંદુ પાસેના બાકીના ખુણા કાટખુણા છે એ સિદ્ધ કરો.

૨. અવક ત્રિકોણમાં \angle અવક = \angle અકવ, અને વકને બંને બાજુએ વધારેલી છે; તો બહારના ખુણા સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

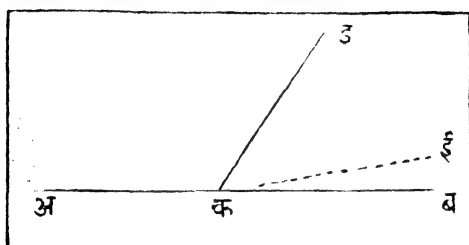
૩. અવક ખુણાને બડથી દુભાગ્યો છે, અને ડવ, ઈ સુધી વધારેલી છે; તો \angle અવઈ = \angle કવઈ એ સિદ્ધ કરો.

૪. અવ લીટીને કડ લીટી ક બિંદુમાં મળે છે, અને \angle અકડ, \angle ડકવ અનુક્રમે કઈ અને કફ લીટીઓ વડે દુભાગેલા છે; તો \angle ઈકફ કાટખુણો છે એ સિદ્ધ કરો.

૫. બે અંબ લીટીમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી અનેક લીટીઓ અવની એકબે બાજુએ દોરેલી હોય, તો તેથી બનેલા સર્વ ખુણાનો સરવાળો ૨ કાટખુણા બરાબર છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૨.

જો બે પાસપાસેના ખુણાનો સરવાળો બે કાટ-ખુણાની બરાબર હોય, તો તે ખુણાઓના બહારના ભુજો એકજ સીધી લીટીમાં હોય છે.



પક્ષ—અકડ અને ડકબ એ પાસપાસેના ખુણા છે, અને તેમનો સરવાળો બે કાટખુણા છે.

સાધ્ય—કઅ અને કબ એકજ સીધી લીટીમાં છે.

રચના—જો કઅ અને કબ એકજ સીધી લીટીમાં ન હોય, તો અકને વધારીને અકઈ સીધી લીટી દોરો.

સિદ્ધતા— \therefore અકઈ સીધી લીટી છે,

$$\therefore \angle \text{અકડ} + \angle \text{ડકઈ} = 2 \text{ કાટખુણા. (પ્ર. ૧)}$$

$$\text{પણ } \angle \text{અકડ} + \angle \text{ડકબ} = 2 \text{ કાટખુણા, (પક્ષ.)}$$

$$\therefore \angle \text{અકડ} + \angle \text{ડકઈ} = \angle \text{અકડ} + \angle \text{ડકબ.}$$

દરેક બાજુમાંથી સાધારણ $\angle \text{અકડ}$ બાદ કર્યો;

$$\therefore \text{શેષ } \angle \text{ડકઈ} = \text{શેષ } \angle \text{ડકબ.}$$

\therefore કઈ, કબમાં મળી જાય છે, એટલે કઈ,

કબની બહાર કે અંદર પડી શકતી નથી; અર્થાત્ કઅ, કબ એકજ સીધી લીટીમાં છે.

સૂચના—પ્રમેય ૧ માં કઅ અને કબ એક સીધી લીટીમાં છે, એ પક્ષ છે; અને $\angle \text{અકડ} + \angle \text{બકડ} = 2$

કાટખુણા, એ સાધ્ય છે; અને બીજા પ્રમેયમાં \angle અકડ+
 \angle બકડ=૨ કાટખુણા, એ પક્ષ છે; અને કઅ, કબ એક
 સીધી લીટીમાં છે એ સાધ્ય છે. માટે પ્રમેય ૨ પ્રમેય
 ૧ નો વ્યત્યાસ છે.

૨ જા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અવ લીટીમાંના અ બિંદુમાંથી અવની બંને બાજુએ
 કાટખુણા કરીને અક અને અડ લીટીઓ દોરેલી છે, તો
 કઅડ એક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

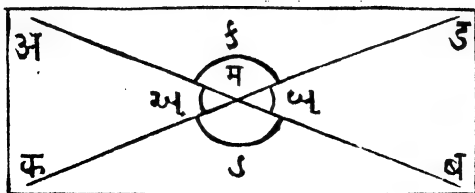
૨. અમક લીટીમાંના મ બિંદુમાંથી તેની બંને બાજુએ
 મવ, મડ લીટીઓ એવી દોરેલી છે, કે \angle અમવ=
 \angle કમડ; તો વમડ એક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૩. મ બિંદુમાંથી મવ, મઅ, મક એ ત્રણ લીટી
 દોરેલી છે; અને મવ લીટી \angle વમઅને અને મદ લીટી
 \angle અમકને દુભાગે છે. હવે જો પમદ કાટખુણો હોય, તો
 વમક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૪. બે લીટીઓ એક બીજાને કાટખુણે છેદે છે; તો તેમના
 સામસામા ખુણા દુભાગનારી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં
 છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૩.

જો બે સીધી લીટીઓ એક બીજાને છેદતી હોય,
 તો તેમના શિરોબિંદુ આગળના સામસામા ખુણા
 એક બીજાની બરાબર હોય છે.



પ્રશ્ન—અમ અને કમડ સીધી લીટીઓ મળિંદુમાં એક બીજીને છેદે છે, તેથી સામસામા ખુણાઓની બે બેડ થાય છે; એક $\angle અ$ અને $\angle બ$ ની બનેલી; અને બીજી $\angle ક$ અને $\angle ડ$ ની બનેલી.

સાધ્ય— $\angle અ = \angle બ$; અને $\angle ક = \angle ડ$.

સિદ્ધતા— \therefore કમડ એક સીધી લીટી છે, અને અમ તે પર પડે છે;

$\therefore \angle અ + \angle ક = ૨$ કાટખુણા; (પ્ર૦ ૧.)

\therefore અમબ એક સીધી લીટી છે, અને ડમ તે પર પડે છે;

$\therefore \angle બ + \angle ક = ૨$ કાટખુણા; (પ્ર૦ ૧.)

$\therefore \angle અ + \angle ક = \angle બ + \angle ક$.

દરેક બાજુમાંથી $\angle ક$ સાધારણ કાઢી લીધો;

\therefore શેષ $\angle અ =$ શેષ $\angle બ$.

તેજ પ્રમાણે $\angle ક = \angle ડ$ એ સિદ્ધ કરી શકાશે.

($\angle ક = \angle ડ$ એ સિદ્ધ કરો.)

૩ જા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. બે કાટખુણાના બુજીને શિરોબિંદુ અથવા મેલનબિંદુની* બીજી બાજુએ વધાર્યા હોય, તો બીજા બે ત્રણ ખુણા થાય છે તે બધા કાટખુણા હોય છે.

૨. અમડ અને બમક એ લીટીઓ એક બીજીને મળિંદુમાં છેદે છે. મય, $\angle અમ$ બને દુભાગે છે; તો એમ સિદ્ધ કરો કે મય વધારી હોય તો તે $\angle કમ$ ડને દુભાગે છે.

પ્રમેય ૧ થી ૩ ઉપરના પ્રશ્ન.

૧. સીધી લીટીને વર્તુળાકારમાં ફેરવીને પ્રમેય ૧ અને ૩ સિદ્ધ કરો.

* જે બિંદુમાં બે અથવા વધારે લીટીઓ મળે છે તેને તેમનું મેલનબિંદુ કહે છે.

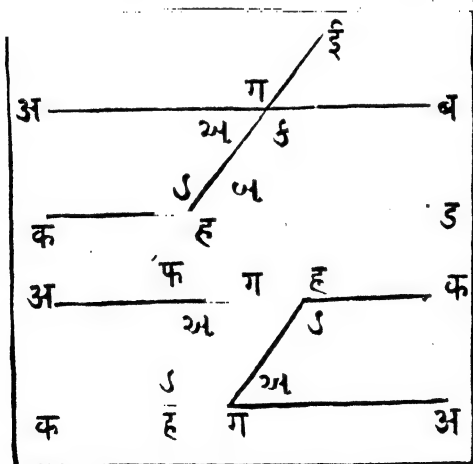
૨. એક બીજને છેદનારી બે લીટીથી થએલા સામસામા બે ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં હોય છે.

૩. મ બિંદુમાંથી મઅ, મવ, મક, મડ આ સીધી લીટીઓ એવી રીતે દોરેલી છે, કે \angle અમવ = \angle કમડ, અને \angle વમક = \angle અમડ; તો અમ અને મક, તેમજ વમ અને મડ લીટીઓ એક સીધી લીટીમાં છે એમ સિદ્ધ કરો.

૪. કોઈ પણ ખુણાના શિરોબિંદુમાંથી તે ખુણાના બંને ભુજ પર દોરેલા લંબોની વચ્ચેનો ખુણો મૂળ ખુણાની બરાબર હોય છે, અથવા તેનો ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.

પ્રમેય ૪.

જો એક સીધી લીટી બીજ બે સીધી લીટીઓને છેદે અને વ્યુત્ક્રમ ખુણા બરાબર કરે, તો તે બે લીટીઓ એક બીજને સમાંતર હોય છે.



પક્ષ—અવ અને કડ લીટીઓને ઈફ લીટી ગ અને હ બિંદુઓમાં છેદે છે, અને \angle અ અને \angle ખ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે.

સાધ્ય—અવ ॥ કડ.

સિદ્ધતા—

$$\therefore \angle \alpha + \angle \delta = 2 \text{ કાટખુણા,} \quad (\text{પ્ર. ૧})$$

$$\text{અને } \angle \beta + \angle \gamma = 2 \text{ કાટખુણા,} \quad (\text{પ્ર. ૧})$$

$$\therefore \angle \alpha + \angle \delta = \angle \beta + \angle \gamma.$$

$$\text{પણ } \angle \alpha = \angle \beta. \quad (\text{પક્ષ.})$$

$$\therefore \angle \delta = \angle \gamma.$$

અગ્રહક આકૃતિ કાપી કાઢો (અથવા તેની નકલ લો)
અને તે બગહડ-આકૃતિ પર એવી રીતે મૂકો, કે હ િંદુ
ગ પર પડે, અને હક, ગબની દિશામાં પડે.

તો $\therefore \angle \delta = \angle \gamma$, (ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે.)

\therefore હગ, ગહની દિશામાં પડશે;

અને \therefore હગ=ગહ,

\therefore ગ િંદુ હ િંદુ પર પડશે.

હવે $\therefore \angle \alpha = \angle \beta$,

\therefore ગઅ, હડની દિશામાં પડશે.

આ પ્રયોગ પરથી સિદ્ધ થાય છે કે ગવ અને હડ જે
દિશામાં પડે છે, તેજ દિશામાં હક અને ગઅ પડે છે.

હવે અવ, કડ લીટીઓ સમાંતર ન હોય, તો તે કોઈ
પણ એક બાજુએ મળવી જોઈએ. તે બ અને ડની બાજુએ
મળે છે એમ ધારીએ, તો તેમનીજ દિશામાં પડનારી હક,
ગઅ એ લીટીઓ પણ અ અને ક તરફ મળશે એમ ધારવું
જોઈએ. પણ જો અવ, કડ એ અ, ક તરફ મળે છે
એમ ધારીએ, તો તેમની અને ગવ, હડની દિશા એકજ
હોવાથી ગવ અને હડ પણ વ, ડ તરફ મળશે એમ ધારવું
જોઈએ (એટલે કે અવ અને કડ બંને છેડા તરફ મળે છે).

પણ જે બે સીધી લીટીઓ વચ્ચે કંઈ અંતર છે, તે બે

ખંને છેડા તરફ મળે, તો એનો અર્થ એજ થાય કે બે સીધી લીટીઓ જગા ઘેરી લે છે. પણ આ વાત અશક્ય છે. (૧૨૧મા પાના પરનો પ્રયોગ જુઓ.) માટે સિદ્ધ થાય છે કે અબ, કડ કોઈપણ બાજુએ મળતી નથી, એટલે તેઓ સમાંતર છે.

૪ થા પ્રમેય પરનો પ્રશ્ન.

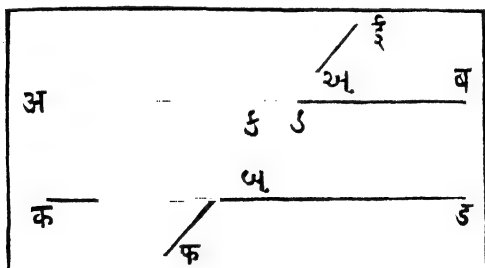
૧. અબકડ એક ચતુષ્કોણ છે અને અક તેનો કર્ણ છે. બે \angle અક બ અરાબર \angle અકડ, અને \angle ડઅક = \angle અકબ, તો અબકડ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૫.

જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓને એવી રીતે છેદે કે—

(૧) બે સંગત ખુણા બરાબર હોય, અથવા

(૨) છેદક લીટીની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક હોય, તો તે બે સીધી લીટીઓ સમાંતર હોય છે.



(૧) પક્ષ—અબ અને કડ લીટીઓને ઈફ છેદે છે, અને સંગત ખુણા અ અને બ બરાબર છે.

સાધ્ય—અબ ॥ કડ.

સિદ્ધતા—

$$\angle \alpha = \text{સામેનો } \angle \delta, \quad (\text{પ્ર. ૩.})$$

$$\text{પણ } \angle \alpha = \angle \beta, \quad (\text{પક્ષ.})$$

$$\therefore \angle \beta = \angle \delta.$$

અને $\therefore \angle \beta$ અને $\angle \delta$ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે,

$$\therefore \text{અવ } \parallel \text{કડ.} \quad (\text{પ્ર. ૪.})$$

(૨) પક્ષ—ઈફ લીટીની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા β અને δ એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.

સાધ્ય—અવ \parallel કડ.

સિદ્ધતા—

\therefore અવ એક સીધી લીટી છે અને તેને ફર્ફ મળે છે,

$$\therefore \angle \delta + \angle \epsilon = 2 \text{ કાટખુણા.} \quad (\text{પ્ર. ૧.})$$

$$\text{પણ } \angle \beta + \angle \epsilon = 2 \text{ કાટખુણા,} \quad (\text{પક્ષ.})$$

$$\therefore \angle \delta + \angle \epsilon = \angle \beta + \angle \epsilon.$$

દરેક બાજુમાંથી $\angle \epsilon$ એ સાધારણ ખુણો લઈ લીધો.

$$\therefore \angle \delta = \angle \beta.$$

અને આ વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે,

$$\therefore \text{અવ } \parallel \text{કડ.} \quad (\text{પ્ર. ૪.})$$

૫ મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. પાસેની આકૃતિમાં,

(૧) જો $\angle \alpha =$

$\angle \delta$ હોય,

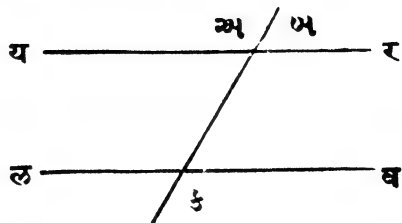
અથવા

(૨) $\angle \beta + \angle \delta$

$= 2$ કાટ-

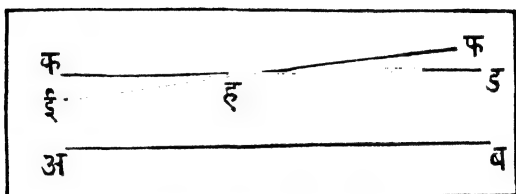
ખુણા હોય;

તો યર \parallel લવ છે એમ બતાવો.



૨. જો એક સીધી લીટી પર બે લંબ દોર્યા હોય, તો તે એક બીજાને સમાંતર હોય છે.

પ્લેક્ટરનું પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ—એક બીજાને છેદનારી બંને સીધી લીટી એક ત્રીજી સીધી લીટીને સમાંતર હોઈ શકે નહિ.



દાખલા તરીકે, કડ, ફફ સીધી લીટીઓ એક બીજાને હ બિંદુમાં છેદે છે. એ પૈકી કડ, અબને સમાંતર છે; તો ફફ, અબને સમાંતર હોઈ શકશે નહિ. કારણ કે કડ લીટી અબને સમાંતર છે, એનો અર્થ એવો છે, કે કડ અને અબની વચ્ચેનું બધું અંતર સરખું છે. હવે જ્યારે ફફ અને કડની વચ્ચેનું અંતર બધે સરખું નથી, ત્યારે ફફ અને અબ વચ્ચેનું અંતર બધે સરખું હોઈ શકે નહિ. માટે ફફ, અબને સમાંતર હોઈ શકે નહિ.

સમાંતર લીટીઓના સંબંધમાં ચુકિલડનું પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ નીચે પ્રમાણે છે:—

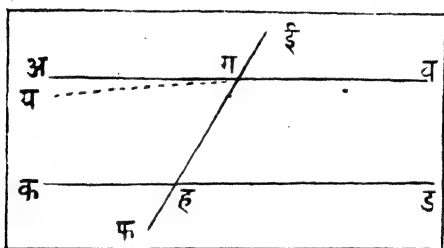
જો એક સીધી લીટી બીજા બે સીધી લીટીને એવી રીતે છેદે, કે તેની એકજ બાજુના બે અંદરના ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય, તો તે બે લીટીઓ, જે બાજુ પરના ખુણાઓનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો છે, તે તરફ વધારવાથી મળશે.

આ વિધાન ખરું જોતાં પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ નથી; તે પ્રમેય ૮ ના બીજા ઉપસિદ્ધાંતનો વ્યત્યાસ છે, એ આગળ જણાઈ આવશે.

પ્રમેય ૬.

જો એક સીધી લીટી બે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદે તો તે—

- (૧) વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા કરે છે;
- (૨) સંગત ખુણા સરખા કરે છે; અને
- (૩) છેદક લીટીની એકજ બાજુના બે અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક કરે છે.



પ્રકાશ—અવ અને કડ સીધી સમાંતર લીટીઓ છે, અને ઈફ તેમને ગ અને હ માં છેદે છે.

સાધ્ય—(૧) \angle અગહ અને \angle ગહડ એ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે.

(૨) \angle ઈગવ અને \angle ગહડ એ સંગત ખુણા સરખા છે; અને

(૩) ઈફની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા \angle વગહ અને \angle ગહડ એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.

રચના—જો \angle અગહ અને \angle ગહડ સરખા ન હોય, તો એક ગય લીટી એવી દોરો, કે યગહ અને ગહડ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા થાય.

(૧) સિદ્ધતા—

$\therefore \angle \text{યગહ} = \angle \text{ગહડ}$, (રચના.)

$\therefore \text{ગય} \parallel \text{કડ}$. (પ્ર. ૪.)

પણુ અબ \parallel કડ, (પક્ષ.)

\therefore ગય અને અબ એ બંને કડને સમાંતર.

પણુ એ અશક્ય છે; (પ્રેરિતું પ્ર. પ્ર.)

$\therefore \angle \text{અગહ}, \angle \text{ગહડ}$ એ સરખા નથી
એમ માની શકાતું નથી; એટલે કે તે સરખાજ છે.

(એજ પ્રમાણે $\angle \text{બગહ} = \angle \text{ગહક}$ એ સિદ્ધ કરી શકાય.)

(૨) સિદ્ધતા—

$\angle \text{ઈગબ} = \angle \text{અગહ}$. (પ્ર. ૩.)

અને $\angle \text{અગહ} = \angle \text{ગહડ}$. (ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે.)

$\therefore \angle \text{ઈગબ} = \angle \text{ગહડ}$.

(એજ પ્રમાણે $\angle \text{ઈગઅ} = \angle \text{ગહક}$.)

(૩) સિદ્ધતા—

$\therefore \angle \text{અગહ} = \angle \text{ગહડ}$, (પ્ર. ૬, ભાગ. ૧.)

અને $\angle \text{બગહ}, \angle \text{અગહનો}$ ન્યૂનતાપૂરક છે,

$\therefore \angle \text{બગહ}, \angle \text{ગહડનો}$ પણ ન્યૂનતાપૂરક છે.

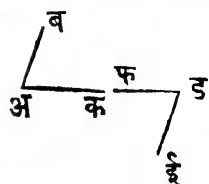
ઉપસિદ્ધાંત—જે બે ખુણાની બાજુઓ સમાંતર
હોય, તે ખુણા સરખા અથવા ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.

ઉપલા ઉપસિદ્ધાંતના ૪ પ્રકાર થાય છે:—

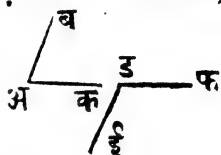
(૧) જો $\angle \text{બઅક}$ અને $\angle \text{ઈડફની}$ બાજુઓ સમાં-
તર હોય અને એકજ દિશામાં દોરેલી
હોય, તો તે ખુણા સરખા હોવા
જોઈએ.



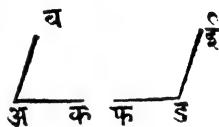
(૨) જો \angle બઅક અને \angle ફડર્ફની બાજુઓ સમાંતર હોય, અને તે સામસામી દિશામાં દોરેલી હોય, તો તે ખુણા સરખા હોવા જોઈએ.



(૩) ડફ, અક એકજ દિશામાં દોરેલી છે; અને ડર્ફ, અબ સામસામી દિશામાં દોરેલી છે. આ બાજુઓમાં ખુણા ન્યૂનતાપૂરક છે.



(૪) જો ડફ,અક સામસામી દિશામાં દોરેલી હોય, અને ડર્ફ,અબ એકજ દિશામાં દોરેલી હોય, તો તે ખુણા ન્યૂનતાપૂરક હોવા જોઈએ.



૬ દ્વા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અબક ત્રિકોણમાં \angle બ= \angle ક, વક પાયાને સમાંતર ડર્ફ દોરેલી છે; તો \angle અડર્ફ= \angle અર્ફડ એ સિદ્ધ કરો.

૨. § * જે લીટી બે સમાંતર લીટીઓમાંથી એક પર લંબ હોય છે, તે બીજી પર પણ લંબ હોય છે.

૩. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામી ખુણા એક બીજાની બરાબર હોય છે.

૪. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણાનો સરવાળો કેટલો થાય છે? આ ઉપરથી ત્રિકોણના સર્વ ખુણાનો

§ * આ ચિન્હ જેમની શરૂઆતમાં છે તે પ્રશ્ન અગત્યના છે, એટલે બીજા પ્રશ્નો છોડવામાં તેમનો ઉપયોગ થવાનો વિશેષ સંભવ છે એમ નોંધવું.

સરવાળો કેટલો થાય, તે નક્કી કરો. (ગમે તે ત્રિકોણ લો, અને તેના પાયાના બંને છેડામાંથી ત્રિકોણની સામી બાજુએ ત્રિકોણની બે બાજુને સમાંતર સીધી લીટીઓ દોરો, અને એવી રીતે ચતુષ્કોણ પુરો કરો. પછી ઉપલા સવાલનો જવાબ આપો.)

૫. * જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક ખુણો કાટખુણો હોય, તો બીજા બધા ખુણા કાટખુણા હોય છે.

૬. * જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓને એવી રીતે છેદે, કે તેથી તે લીટીની એકજ બાજુના અંદરના બે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય; તો તે બાજુ તરફ તે બે સીધી લીટીઓ વધારવાથી મળશે, એમ સિદ્ધ કરો.

૭. એક બીજીને છેદનારી કોઈ પણ બે સીધી લીટીઓની વચ્ચેના સાંકડા ખુણો, તે સીધી લીટીઓને સમાંતર હોઈને એકમેકને છેદનારી બીજી કોઈ પણ બે સીધી લીટીઓની વચ્ચેના સાંકડા ખુણાની બરાબર હોય છે, અને પહોળા ખુણો તેને મળતા આવતા પહોળા ખુણાની બરાબર હોય છે.

૮. એક ખુણાના ભુજો બીજાના ભુજો ઉપર લંબ છે; તો તે ખુણા સરખા અથવા ન્યૂનતાપૂરક છે એમ સિદ્ધ કરો.

૯. બે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદનારી લીટીથી થતા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજીને મળવાથી કાટખુણ ચોખુણ બને છે.

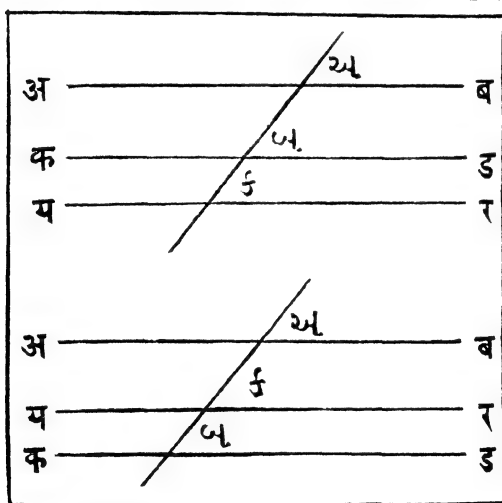
૧૦. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ કાટખુણ ચોખુણ કરે છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. અવક ત્રિકોણના અ શિરોબિંદુમાંથી બક પાયાને સમાંતર સીધી લીટી દોરીને, ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા થાય છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૨. અબ અને કડ એ સમાંતર સીધી લીટીઓને પ અને દ બિંદુઓમાં છેદનારી એક સીધી લીટી દોરેલી છે. એકજ બાજુ પરના પ અને દ બુણાને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે. આ આકૃતિને એક વખતે મપ અને એક વખતે મદમાંથી વાળીને મ બિંદુ પદ, અબ, અને કડથી સરખે અંતરે છે એમ બતાવી આપો.

પ્રમેય ૭.

જે સીધી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીને સમાંતર હોય છે, તે પરસ્પર સમાંતર હોય છે.



પક્ષ—અબ અને કડ ॥ ચર.

સાધ્ય—અબ ॥ કડ.

રચના—અબ, કડ, અને ચરને છેદનારી એક સીધી લીટી દોરો.

(\angle અ, \angle બ, \angle ક, આ સંગત બુણા છે.)

સિદ્ધતા— \therefore અબ ॥ યર, (પક્ષ).

$$\therefore \angle અ = \text{સંગત } \angle ક. \quad (\text{પ્ર. ૬})$$

તેમજ \therefore કડ ॥ યર, (પક્ષ).

$$\therefore \angle બ = \text{સંગત } \angle ક. \quad (\text{પ્ર. ૬})$$

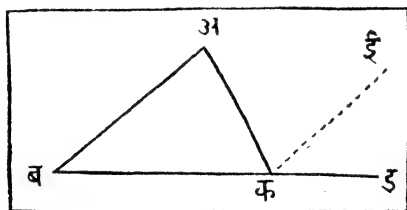
$$\therefore \angle અ = \angle બ.$$

\therefore આ ખુણા સંગત છે,

$$\therefore \text{અબ ॥ કડ.} \quad (\text{પ્ર. ૫})$$

પ્રમેય ૮.

ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે.



પક્ષ—અબક ત્રિકોણ છે.

સાધ્ય— $\angle અ + \angle બ + \angle ક = ૨$ કાટખુણા.

રચના—બકને ડ સુધી વધારો. કમાંથી બઅ ॥ કઈ દોરો.

સિદ્ધતા— \therefore બઅ અને કઈ સમાંતર સીધી લીટીઓને અક છે છે,

$$\therefore \angle અ = \text{વ્યુત્ક્રમ } \angle અકઈ. \quad (\text{પ્ર. ૬})$$

અને \therefore બઅ અને કઈ સમાંતર સીધી લીટીઓને વડ છે છે,

$\therefore \angle \text{બ} = \text{સંગત } \angle \text{ઈકડ.}$ (પ્ર. ૬)

$\therefore \angle \text{અ} + \angle \text{બ} = \angle \text{અકઈ} + \angle \text{ઈકડ.}$

દરેક બાજુમાં $\angle \text{અકબ}$ ઉમેરો.

$\therefore \angle \text{અ} + \angle \text{બ} + \angle \text{અકબ} = \angle \text{અકઈ} + \angle \text{ઈકડ} + \angle \text{અકબ.}$

પણ $\angle \text{અકબ} + \angle \text{અકઈ} + \angle \text{ઈકડ} = ૨ \text{ કાટખુણા;}$
(કારણ કે વક્ર એક સીધી લીટી છે); (પ્ર. ૧)

$\therefore \angle \text{અ} + \angle \text{બ} + \angle \text{અકબ} = ૨ \text{ કાટખુણા;}$

એટલે અવક ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો = ૨ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—ત્રિકોણની એક બાજુ વધારવાથી થતો બહારનો ખુણો તેની પાસેના સિવાયના અંદરના બે ખુણાના સરવાળાની બરાબર હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—ત્રિકોણના કોઈ પણ બે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—ત્રિકોણની એક બાજુ વધારવાથી બનેલો બહારનો ખુણો તેની પાસેના સિવાયના કોઈ પણ અંદરના ખુણાથી મોટો હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૪—દરેક ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા બે ખુણા સાંકડા ખુણા હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૫—જો એક ત્રિકોણના બે ખુણા અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખુણાની બરાબર હોય, તો તેમના ત્રીજા ખુણા પણ સરખા હોય છે. (એવા ત્રિકોણોને પરસ્પર સમકોણ પણ કહે છે.)

ઉપસિદ્ધાંત ૬—ચતુષ્કોણના ચાર ખુણાનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે.

૮ મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અબક ત્રિકોણમાં \angle બ = \angle ક છે; બ અને અ તરફ હ સુધી લંબાવી છે; તો સાબીત કરો કે \angle કઅહ, \angle બ અથવા \angle કનો બમણો છે.

૨. કાટખુણ ત્રિકોણના બે સાંકડા ખુણા સરખા હોય, તો સાબીત કરો કે તે સરખા ખુણામાંનો દરેક ખુણો અર્ધો કાટખુણો છે.

૩. સમબાજુ ત્રિકોણનો દરેક ખુણો કાટખુણાના બે તૃતીયાંશ બરાબર હોય છે.

૪. અબક ત્રિકોણના અ અને બ ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ હમાં મળે છે; તો અહબ ખુણો પહોળો છે એ સિદ્ધ કરો.

૫. ત્રિકોણનો એક ખુણો બીજા બે ખુણાના સરવાળાથી ઓછો હોય, તો તે ખુણો સાંકડો હોય છે, એ સિદ્ધ કરો; અને એના વ્યત્યાસ સિદ્ધ કરો.

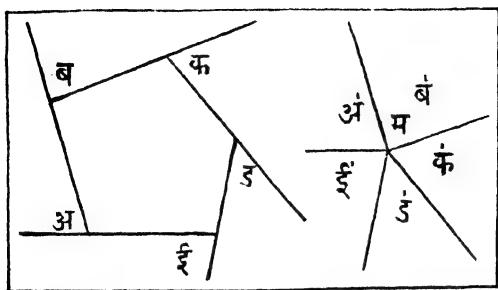
૬. ત્રિકોણનો એક ખુણો બીજા બે ખુણાના સરવાળાથી વધારે હોય, તો તે પહોળો ખુણો હોય છે, આ નિયમ અને તેનો વ્યત્યાસ સિદ્ધ કરો.

૭. કાટખુણ ત્રિકોણના કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર દોરેલા લંબથી જે બે ત્રિકોણ થાય છે, તેમાંના દરેકના સર્વ ખુણા અનુક્રમે મૂળ કાટખુણ ત્રિકોણના ખુણાની બરાબર હોય છે.

પ્રમેય ૯.

બહિર્વક* સીધીલીટી-આકૃતિની સર્વ બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારી હોય તો તેથી બનેલા બધા બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે.

* બહિર્વક—જેના સર્વ ખુણા બહારની બાજુથી બહિર્વક હોય, અથવા અંદરની બાજુથી અંતર્વક હોય, એવી.



પક્ષ—અબકડઈ આ બહિર્વક સીધીલીટીવાળી આકૃતિની બાબુઓ એકજ ક્રમે વધારવાથી \angle અ, \angle બ, \angle ક, \angle ડ, \angle ઈ આ બહારના ખુણા બનેલા છે.

સાધ્ય— \angle અ+ \angle બ+ \angle ક+ \angle ડ+ \angle ઈ=૪ કાટખુણા.

રચના—આપેલી આકૃતિની બહાર કોઈ પણ મ બિંદુ લો. (આ બિંદુ આપેલી આકૃતિમાં લીધું હોય તો પણ ચાલે.)

આપેલી આકૃતિની બાબુઓ જે દિશામાં વધારેલી હોય, તેજ દિશામાં, તે આકૃતિની બાબુઓને સમાંતર સીધી લીટીઓ મ બિંદુમાંથી દોરો.

સિદ્ધતા—

$\therefore \angle$ અ, \angle બ, \angle ક, \angle ડ, \angle ઈની બાબુઓને સમાંતર દોરેલી લીટીઓની વચ્ચે અનુક્રમે \angle અં, \angle બં, \angle કં, \angle ડં, \angle ઈં આ ખુણા છે;

$\therefore \angle$ અ= \angle અં, \angle બ= \angle બં, \angle ક= \angle કં, \angle ડ= \angle ડં, \angle ઈ= \angle ઈં; (છટ્ટા પ્રમેયનો ઉપસિદ્ધાંત.)

$\therefore \angle$ અ+ \angle બ+ \angle ક+ \angle ડ+ \angle ઈ= \angle અં+ \angle બં+ \angle કં+ \angle ડં+ \angle ઈં.

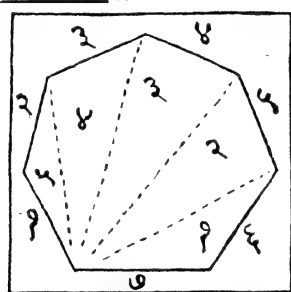
અને $\therefore \angle$ અં+ \angle બં+ \angle કં+ \angle ડં+ \angle ઈં=૪ કાટખુણા.
(પ્ર. ૧, ઉપ.)

$\therefore \angle \text{અ} + \angle \text{બ} + \angle \text{ક} + \angle \text{ડ} + \angle \text{ઈ} = ૪ \text{ કાટખુણા.}$

ઉપસિદ્ધાંત—સખાળુની સીધીલીટીવાળી આકૃતિ-
ના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો (૨ સ-૪)
કાટખુણા થાય છે.

૯ મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. પ્રમેય ૯નો આધાર લીધા સિવાય ઉપરો ઉપસિદ્ધાંત,
એક શિરોબિંદુને બીજાં શિરોબિંદુઓની જોડે સાંધીને, અને
એવી રીતે તે આકૃતિના ત્રિકોણ બનાવીને સિદ્ધ કરો. (નીચેની
આકૃતિ જુઓ. આ ત્રિકોણોની સંખ્યા સ-૨ થાય છે.)



૨. એક ત્રિકોણની અબ, બક, કઅ ખાળુઓ વધાર-
વાથી ત્રણ બહારના ખુણા થયા છે. આ બહારના ખુણા
પૈકી બે ખુણાનો સરવાળો જો બહારના ત્રીજા ખુણાથી બમણો
હોય, તો ત્રિકોણનો એક ખુણો કે કાટખુણો છે એ બતાવો.

૩. અબક ત્રિકોણમાં અડ, વઈ, કફ એવી દોરી છે,
કે તેઓ અબ, બક, કઅની સાથે ડઅબ, ઈબક, ફકઅ
ખુણા સરખા કરે છે. હવે, જો અડ, વઈ, કફ એક બિંદુમાં
ન મળતી હોય, તો તેઓ એક ત્રિકોણ કરશે, અને તેના
ખુણા અબક ત્રિકોણના ખુણાની બરાબર થશે, એ સિદ્ધ કરો.

૪. અવકર્ણ એક પંચકોણ છે, અને એની કોઈ પણ બાજુઓ સમાંતર નથી. તે સર્વ બાજુઓ બંને તરફ વધારી હોય, તો ફ, ગ, હ, ચ, લ બિંદુઓમાં મળે છે; તો ફ, ગ, હ, ચ, લ ખુણાઓનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર છે એ બતાવો.

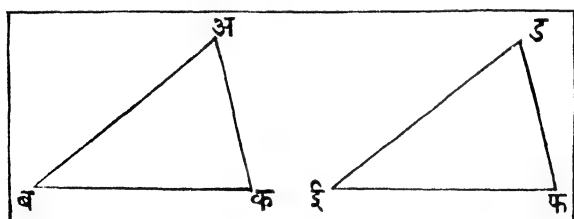
૫. જેમનો બહારનો ખુણો અનુક્રમે ૬૦° , ૩૦° , ૪૫° હોય, એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિને બાજુ કેટલી ?

૬. જેનો એક બહારનો ખુણો ૧૫° , ૭° , ૧૧° , ૬° , ૫° અથવા ૪૦° હોય, એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિ હોઈ શકે ?

૭. જેનો અંદરનો ખુણો ૧૦૮° , ૧૨૦° , ૧૩૦° , ૧૪૪° , અથવા ૬૦° હોય, એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિ હોઈ શકે ?

પ્રમેય ૧૦.

જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખુણાની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—અવક અને ડર્ફ ત્રિકોણમાં અવ=ડર્ફ; અક=ડફ, અને $\angle A = \angle D$.

સાધ્ય— \triangle અવક \triangle ડર્ફ.

સિદ્ધતા—

\triangle અવકને \triangle ડર્ફ પર એવી રીતે મૂકો, કે અ બિંદુ ડ પર પડે, અને અવ બાબુ ડર્ફની દિશામાં પડે.

\therefore અવ=ડર્ફ; (પક્ષ.)

\therefore બ શિરોબિંદુ ઈ પર પડે છે.

અને $\therefore \angle અ = \angle ડ$, (પક્ષ.)

\therefore અક, ડફની દિશામાં પડે છે.

અને \therefore અક=ડફ, (પક્ષ.)

\therefore ક શિરોબિંદુ ફ પર પડે છે.

$\therefore \triangle$ અવક, \triangle ડર્ફ પર બરાબર આવી રહે છે; એટલે તે ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

૧૦મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * જો અવ અને કડ સીધી લીટીઓ એક બીજીને કાટખુણે હુભાગે, તો અકવડ આકૃતિ સમબાબુ ચતુષ્કોણ થશે.

૨. એક સમઠિબાબુ ત્રિકોણની અવ અને અક સરખી બાબુઓમાં ક્ષ અને ચ બિંદુ એવાં લીધાં છે, કે અક્ષ=અચ; તો એમ સિદ્ધ કરો કે કક્ષ=વચ છે અને કક્ષ અને વચ, વક સાથે સરખા ખુણા કરે છે.

૩. * જો અવ અને કડ સીધી લીટીઓ એક બીજીને હુભાગે, તો અકવડ આકૃતિ સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણ થાય.

૪. * અવક ત્રિકોણના વક પાયાનું ડ મધ્યબિંદુ છે. અ અને ડ સાંધો, અને અડને ઈ સુધી એવી રીતે વધારો, કે ડર્ફ=અડ થાય. એમ સિદ્ધ કરો કે અવ=ઈક, અને અક ॥ ઈવ.

૫. અવકડ એક ચતુષ્કોણ છે, અને તેમાં અવ=કડ, અડ=વક, અને $\angle અ = \angle ક$ છે; તો અવકડ સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

૬. * ચોરસનો કર્ણુ જે ખુણાઓમાં થઈને જાય છે તેમને દુભાગે છે અને ચોરસને પણ દુભાગે છે, એ સિદ્ધ કરો.

૭. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી (૧) પાયાને દુભાગે છે, (૨) પાયા પર લંબ થાય છે, (૩) તે ત્રિકોણને દુભાગે છે, અને (૪) આ લીટીમાંનું કોઈ પણ બિંદુ પાયાના બે છેડાથી સરખે અંતરે હોય છે.

૮. * ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી તે બાજુઓ પર દોરેલા લંબ જે બિંદુમાં મળે છે તે બિંદુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૯. * લીટીને દુભાગનાર લંબમાંનું કોઈ પણ બિંદુ તે લીટીના બંને છેડાથી સરખે અંતરે હોય છે.

૧૦. અબકડ અને ચરલવ ચતુષ્કોણોમાં અબ=ચર, બક=રલ, કડ=લવ, \angle બ= \angle ર, અને \angle ક= \angle લ: તો આ આકૃતિઓ એકરૂપ છે એમ સિદ્ધ કરો.

૧૧. * અબ અને કડ લીટીઓ સરખી અને સમાંતર છે, તો અક અને બડ સરખી અને સમાંતર છે એ બતાવો.

૧૨. બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણોના પાયાની સામેના ખુણા સરખા છે, અને તેમાંનો એક ત્રિકોણ બીજા પર એવી રીતે મૂકેલો છે, કે તેમના પાયાની સામેના ખુણા એક બીજા પર બરાબર આવી રહે છે. હવે એમ સિદ્ધ કરો કે તે ત્રિકોણોમાંના એકનાં શિરોબિંદુઓની સાથે બીજા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ સરખી છે.

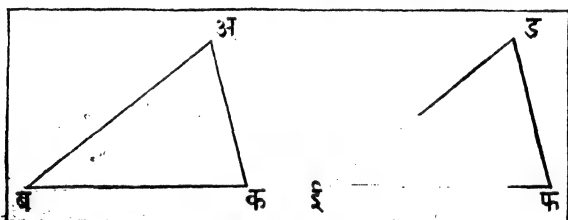
૧૩. અબક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની બબ અને અક બાજુ પર અબહ અને અકચ એવા સમબાજુ ત્રિકોણ બહારની બાજુએ દોરેલા છે; તો કહ=બચ એ સિદ્ધ કરો.

૧૪. અબક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની અબ અને અક બાજુ પર બહારની બાજુએ અબહચ અને અકલમ ચોરસ દોરેલા છે; તો બમ=ચક એ બતાવી આપો.

૧૫. અવકડ ચોરસમાં મ બિંદુ ગમે ત્યાં લીધેલું છે. મઅ પર અડની બાજુએ અમઈફ ચોરસ દોર્યો છે; તો વમ=ડફ એ બતાવો.

પ્રમેય ૧૧.

જો બે ત્રિકોણમાંના એકના બે ખુણા અનુક્રમે બીજના બે ખુણાની બરાબર હોય, અને એકની એક બાજુ તેને મળતી આવતી બીજની એક બાજુની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



પ્રકાર ૧ લો—

પક્ષ—અવક અને ડઈફ આ બે ત્રિકોણમાં $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, અને વક=ઈફ (સરખા ખુણાઓને અડકેલી બાજુઓ.)

સાધ્ય— \triangle અવક \equiv \triangle ડઈફ.

સિદ્ધતા—

\triangle અવક, \triangle ડઈફ પર એવી રીતે મૂકો, કે વ, ઈ પર પડે, અને વક, ઈફની દિશામાં પડે.

હવે \therefore વક=ઈફ, (પક્ષ.)

\therefore ક, ફ પર પડે છે.

અને \therefore $\angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$, (પક્ષ.)

\therefore વઅ, કઅ અનુક્રમે ઈડ, ફડની દિશામાં પડે છે.

\therefore અ, ડ પર આવી રહે છે.

\therefore \triangle અવક \equiv \triangle ડઈફ.

પ્રકાર ૨ ને—

પક્ષ—અવક અને ડર્ફ ત્રિકોણોમાં $\angle બ = \angle ઈ$,
 $\angle ક = \angle ફ$ અને અવ=ડર્ફ (બંને ત્રિકોણોમાંના એકેક
 સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ સરખી.)

સાધ્ય— \triangle અવક \equiv \triangle ડર્ફ.

સિદ્ધતા— $\angle અ + \angle બ + \angle ક = ૨$ કાટખુણા. (પ્ર. ૮)

$\angle ડ + \angle ઈ + \angle ફ = ૨$ કાટખુણા. „

$\therefore \angle અ + \angle બ + \angle ક = \angle ડ + \angle ઈ + \angle ફ.$

પણ $\angle બ + \angle ક = \angle ઈ + \angle ફ$, (પક્ષ.)

\therefore શેષ $\angle અ =$ શેષ $\angle ડ.$

હવે અવક અને ડર્ફ ત્રિકોણોમાં,

$\therefore \angle અ = \angle ડ,$

$\angle બ = \angle ઈ,$

અને અવ=ડર્ફ;

$\therefore \triangle$ અવક $\equiv \triangle$ ડર્ફ. (પ્ર. ૧૧, પ્રકાર ૧)

૧૧મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. બે કાટખુણ ત્રિકોણ પૈકી એકનો કર્ણ અને એક સાંકડો ખુણો બીજા ત્રિકોણના એજ અવયવોની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.

૨. * જો ત્રિકોણના એક ખુણાને દુભાગનારી લીટી સામી બાજુ પર લંબ હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૩. એકરૂપ ત્રિકોણોના સરખા ખુણાનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૪. અવક ત્રિકોણમાં અવ=અક; તો બ અને ક ખુણામાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબ સરખા છે, એ (સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના ધર્મોનો ઉપયોગ કર્યા વગર) સિદ્ધ કરો.

૫. * અવક ત્રિકોણમાં \angle બ= \angle ક; તો બ અને ક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબ સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

૬. * ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાંનું કોઈ પણ બિંદુ ખુણાના બુનેથી સરખે અંતરે હોય છે.

૭. * અવક ત્રિકોણના બ અને ક ખુણાને દુભાગનારી લમ અને કમ લીટીઓ મ બિંદુમાં મળે છે. બક, કઅ, અબ પર અનુક્રમે મય, મર, મલ લંબ દોરેલા છે; તો મય=મર=મલ એ સિદ્ધ કરો.

૮. ગ અને હ એક બીજાને છેદનારી લીટીઓ છે, અને ય એક ત્રીજી લીટી છે. યમાં એવાં બે બિંદુઓ શોધી કાઢો, કે તે ગ અને હથી સરખે અંતરે હોય. આ વાત ક્યારે અશક્ય હોય છે ?

૯. પચરસ ચતુષ્કોણનો પર કર્ણ \angle પ અને \angle રને દુભાગે છે; તો \triangle પચર= \triangle પસર એ સિદ્ધ કરો.

૧૦. બે સમાંતર લીટીઓ વચ્ચેનું અબ લંબાંતર કમાં દુભાગેલું છે. ક બિંદુમાં થઈને જનારી કોઈ પણ લીટી દોરી છે, અને તે સમાંતર લીટીઓને પ અને ચ બિંદુઓમાં મળતાં સુધી વધારેલી છે. તો કપ=કચ એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. અવકડ એક ચતુષ્કોણ છે, અને બડ પર અઈ અને કફ લંબ દોરેલા છે. હવે જો અઈ, કફ બરાબર હોય, તો બડ, અકને દુભાગે છે એ બતાવી આપો.

૧૨. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે.

૧૩. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે.

૧૪. અવકઙ એક ચતુષ્કોણ છે, અને અક કર્ણ \angle અ, \angle કને દુભાગે છે; તો અક, બીજા કર્ણ વડની સાથે કાટખુણો કરે છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૫. અવ લીટીનું ક મધ્યબિંદુ છે, અને આ બિંદુમાં થઈને જનારી કોઈ પણ લીટી દોરી છે; તો અ અને બમાંથી આ લીટી પર દોરેલા લંબ સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૬. અવ લીટી પર અ અને બ છેડા આગળ વિરુદ્ધ દિશાઓમાં લંબો દોરેલા છે; અને અવના મધ્યબિંદુ કમાં થઈને જનારી લીટી તે લંબોને અનુક્રમે ડ અને ર્માં મળે છે; તો અડ=વર્ડ, અને કડ=ર્ક એ સિદ્ધ કરો.

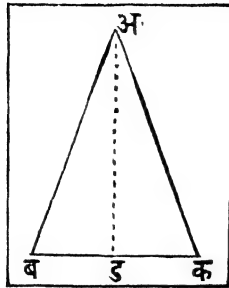
૧૭. એક વર્તુળની કઅ અને કવ ત્રિજ્યાઓ એક બીજી પર લંબ છે. અમ અને બન તે વર્તુળના કોઈ પણ વ્યાસ પર દોરેલા લંબ છે; તો અમ=કન અને બન=કમ એમ બતાવી આપો.

૧૮. અવકઙ ચતુષ્કોણના અ,વ,ક,ઙ ખુણા અનુક્રમે ર્ફ,ગ,હ ચતુષ્કોણના ર્ફ,ફ,ગ,હ ખુણાની બરાબર છે; અવ, કઙ અનુક્રમે ર્ફ, ગહની બરાબર છે; અને અડ, વક લીટીઓ એવી છે, કે તે વધારી હોય તો મળે; તો આ ચતુષ્કોણો એકરૂપ છે એમ બતાવો.

૧૯. અવક ત્રિકોણનાં અ,વ,ક શિરોબિંદુઓમાંથી અનુક્રમે વક, કઅ, અવ બાજુઓને સમાંતર લીટીઓ દોરેલી છે. આ લીટીઓ ડ,ર્,ફ બિંદુઓમાં મળે છે; તો એમ બતાવો, કે ડર્ફ ત્રિકોણની બાજુઓનાં અ,વ,ક મધ્ય બિંદુઓ છે.

પ્રમેય ૧૨.

ત્રિકોણની બે બાજુઓ સરખી હોય, તો તે બાજુઓની સામેના ખુણા પણ સરખા હોય છે.



પક્ષ—અબક ત્રિકોણ છે, અને તેમાં અબ=અક.

સાધ્ય— \angle બ = \angle ક.

રચના— \angle બ અકને દુભાગનારી અડ દોરો. ધારો કે તે બકને ડમાં મળે છે.

સિદ્ધતા—

\therefore અબડ અને અકડ ત્રિકોણોમાં,
અબ=અક; (પક્ષ.)

અડ અને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે;

\angle બઅડ = \angle કઅડ; (રચના.)

$\therefore \triangle$ અબડ $\equiv \triangle$ અકડ. (૫-૧૦.)

$\therefore \angle$ બ = \angle ક.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સમદ્વિબાજી ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી (૧) પાયાને દુભાગે છે, (૨) પાયા પર લંબ હોય છે, અને (૩) ત્રિકોણને દુભાગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—સમબાજી ત્રિકોણ સમકોણ હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—સમબાજી ત્રિકોણનો દરેક ખુણો 60° હોય છે.

૧૨મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. સમદ્વિબાજી ત્રિકોણની સરખી બાજુઓ પાયા તરફ વધારી હોય તો તેથી થતા બહારના ખુણા સરખા હોય છે.

૨. સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુ પાસેનો બહારનો ખુણો પાયા આગળના દરેક ખુણાથી બમણો હોય છે.

૩. અબક અને હબક આ બે સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણ એકજ પાયા વક પર છે, અને પહેલો ત્રિકોણ બીજાની અંદર છે. તો \angle અબક = \angle અકહ એ સિદ્ધ કરો.

૪. ઉપલા પ્રશ્નમાંના ત્રિકોણો વકની સામસામી બાણુઓ છે એમ ધારીને તેનો જવાબ આપો.

૫. * સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુને પાયાના મધ્ય-બિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી પાયા પર લંબ હોય છે, એ ક્રમવિરુદ્ધ+ સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરો.

૬. * ચતુષ્કોણની સર્વ બાણુઓ સરખી હોય તો સામ-સામા ખુણા સરખા હોય છે.

૭. * ત્રિકોણની મધ્યગા પાયાથી અર્ધાં હોય તો તે ત્રિકોણ કાટખુણુ ત્રિકોણ હોય છે.

૮. * સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુ-માંથી પાયા પર દોરેલો લંબ પાયાને દુભાગે છે.

૯. સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુમાંથી સરખી બાણુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૧૦ * સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાના છેડામાંથી સામી બાણુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૧૧. સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુમાંથી સરખી બાણુઓના મધ્યબિંદુઓ સુધી દોરેલી લીટીઓ સરખી હોય છે.

૧૨. સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાના છેડામાંથી સામી બાણુઓના મધ્યબિંદુઓ સુધી દોરેલી લીટીઓ સરખી હોય છે.

૧૩. સમબાણુ ત્રિકોણની મધ્યગાઓ સરખી હોય છે.

+ ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતા--આનો અર્થ ૧૭૨ માં પાના પર આપ્યો છે.

૧૪. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બિંદુમાં મળતાં સુધી વધારી હોય તો તે સરખી હોય છે.

૧૫. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની સરખી બાજુઓને વધારી તેમને મળતાં સુધી પાયાના છેડામાંથી પાયા પર દોરેલા લંબ વધાર્યા હોય તો તે સરખા થાય છે.

૧૬. અબક ત્રિકોણમાં અબ=અક; \angle અ અને \angle કને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તો મબ, \angle બને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

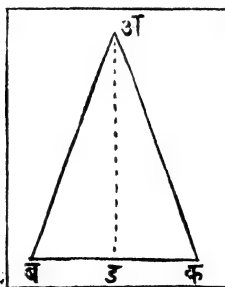
૧૭. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે.

૧૮. અબક સમબાજુ ત્રિકોણની અબ અને અક બાજુઓ પર બઅડ, કઅઈ સમબાજુ ત્રિકોણ દોરેલા છે; તો ડઅ,અઈ એકજ સીધી લીટીમાં છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૯. અબ, એક અર્ધવર્તુળનો વ્યાસ છે; અને પ પરિધ પર ગમે ત્યાં એક બિંદુ છે; તો અપબ ખુણો એક કાટખુણો છે એ બતાવી આપો.

પ્રમેય ૧૩.

ત્રિકોણના બે ખુણા સરખા હોય તો તે ખુણાઓની સામેની બાજુઓ સરખી હોય છે.



પ્રકાશ—અબક એક ત્રિકોણ છે, તેમાં \angle બ= \angle ક.

મ્નાધ્ય—અક=અવ.

રચના—વઅક ખુણાને દુભાગનારી લીટી દોરો, અને ધારો કે તે વકને ડમાં મળે છે.

સિદ્ધતા—અવડ અને અકડ ત્રિકોણોમાં—

$$\angle વ = \angle ક; \quad (\text{પક્ષ.})$$

$$\angle વઅડ = \angle કઅડ; \quad (\text{રચના}).$$

અડ સાધારણ છે;

$$\therefore \triangle અવડ \equiv \triangle અકડ. \quad (\text{પ્ર. ૧૧.})$$

\therefore અવ=અક.

ઉપસિદ્ધાંત—સમકોણ ત્રિકોણ સમખાળુ હોય છે.

૧૩મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. ત્રિકોણના બે બહારના ખુણા સરખા હોય તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિખાળુ હોય છે.

૨. સમદ્વિખાળુ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ અને પાયો એ ત્રણ મળીને સમદ્વિખાળુ ત્રિકોણ કરે છે.

૩. અવક સમદ્વિખાળુ ત્રિકોણમાં અવ=અક અને વ ને કમાંથી સામી ખાળુઓ પર દોરેલા લંબ ક્ષમાં મળે છે; તો ક્ષવ=ક્ષક એ સિદ્ધ કરો.

૪. અવક સમદ્વિખાળુ ત્રિકોણમાં અવ=અક, અને $\angle વ$ તથા $\angle ક$ ને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તો મઅ, \angle અને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

૫. ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી ખુણાના એક ભુજને સમાંતર એક લીટી દોરી હોય, અને તેને બીજા ભુજને મળતાં સુધી વધારી હોય, તો તેથી બનેલો ત્રિકોણ સમદ્વિખાળુ હોય છે.

૬. અવકડ ચતુષ્કોણમાં અવ=અડ, અને $\angle વ = \angle ડ$; તો કવ=કડ છે એમ સિદ્ધ કરો.

૭. અવક ત્રિકોણના વક પાયામાં પ,ચ બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે \angle વઅપ= \angle કઅચ છે. જો અપ=અચ હોય તો અવક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

૮. અવકડ ચતુષ્કોણના અ અને વ ખુણા પહોળા છે અને સરખા પણ છે, અને અવ ॥ કડ છે; તો અડ=વક એ સિદ્ધ કરો.

૯. અવક ત્રિકોણમાં \angle વ= \angle ક=૨ \angle અ, અને \angle વને દુભાગનારી લીટી અકને ડમાં મળે છે; તો અડ=વડ=વક છે એમ સિદ્ધ કરો.

૧૦. અવક સમબાજુ ત્રિકોણની વક, કઅ, અવ બાજુઓ પર અનુક્રમે વકડ, કઅઈ, અવફ સમબાજુ ત્રિકોણો દોર્યા છે; તો \angle ડ, \angle ઈ, \angle ફ એક સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. અવક ત્રિકોણની અવ અને અક બાજુઓમાં ડ અને ઈ બિંદુઓ એવી રીતે લો, કે ડઈ, વકને સમાંતર થાય; અને વડની બરાબર થાય.

૧૨. અવક કાટખુણુ ત્રિકોણના અક કર્ણમાં ડ બિંદુ એવું લીધું છે, કે \angle ડકવ= \angle ડવક છે; તો ખતાવી આપો કે ડક=ડવ=ડઅ.

૧૩. * કાટખુણુ ત્રિકોણના કાટખુણાના શિરોબિંદુને કર્ણના મધ્યબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી કર્ણના અર્ધ બરાબર હોય છે, એ ઉપલા પ્રશ્નને આધારે સિદ્ધ કરો.

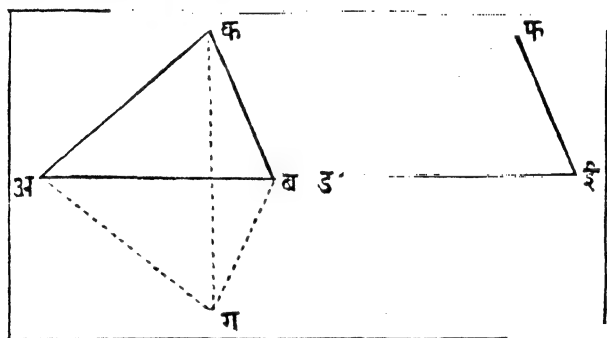
૧૪. * કોઈ પણ ત્રિકોણમાં પાયાની સામેના શિરોબિંદુ-માંથી પાયાના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી શિરોબિંદુ આગળના ખુણાને દુભાગે, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૧૫. અવક ત્રિકોણના વક પાયામાં (જરૂર પડે તો પાચો વધારીને) એવું એક બિંદુ લો, કે તેનું અ અને કથી અંતર સરખું હોય.

૧૬. આપેલી લીટીમાં એક અ બિંદુ છે, અને તે લીટીની બહાર એક બ બિંદુ છે; તો આપેલી લીટીમાં એવું એક ક બિંદુ શોધી કાઢો, કે (૧) બક અને કઅનો સરવાળો એક આપેલી લીટીથી મોટો થાય; (૨) બક અને કઅની ગુણિત એક આપેલી લીટી બરાબર થાય.

પ્રમેય ૧૪.

જો એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણ બાજુની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—અબક અને ડઈફ ત્રિકોણોમાં અબ=ડઈ, અક=ડફ, બક=ઈફ.

સાધ્ય— \triangle અબક \equiv \triangle ડઈફ.

સિદ્ધતા—

ધારો કે સૌથી મોટી બાજુ અબ છે.

\triangle ડઈફ ઉપાડીને એવી રીતે મૂકો, કે તેનું ડ શિરોબિંદુ અ પર પડે, ડઈ પાંચો અબની દિશામાં પડે, અને ફ શિરોબિંદુ કથી વિરુદ્ધ દિશામાં પડે.

\therefore અબ=ડઈ,

(પક્ષ.)

∴ હ, વ પર પડશે.

ધારો કે ફ શિરોબિંદુ-ગ સ્થાનમાં પડે છે.

ક, ગ સાંધો.

હવે ∴ અક=ડફ, અને ડફ=અગ, (પક્ષ
અને રચના.)

∴ અક=અગ.

∴ ∠અકગ=∠અગક. (પ્ર. ૧૨.)

અને ∴ બક=ઈફ, અને ઈફ=વગ, (પક્ષ અને
રચના.)

∴ બક=વગ.

∴ ∠બકગ=∠વગક. (પ્ર. ૧૨.)

∴ ∠અકગ + ∠બકગ = ∠અગક +
∠વગક.

∴ ∠અકવ = ∠અગવ.

પણ ∠અગવ એટલે ∠ડફઈ, છે,

∴ ∠અકવ = ∠ડફઈ.

હવે ∴ અવક અને ડઈફ ત્રિકોણોમાં—

અક=ડફ, (પક્ષ.)

કવ=ઈફ, (પક્ષ.)

∠અકવ = ∠ડફઈ;

∴ Δઅવક ≡ Δડઈફ. (પ્ર-૧૦)

૧૪ મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અવકડ ચતુષ્કોણમાં અવ=અડ; કવ=કડ; તો
અક કર્ણ ∠અ અને ∠કને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

૨. * ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓ સરખી હોય, તો
તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૩. અવક ત્રિકોણની અવ અને અક બાજુઓ સરખી

છે, અને **બક** પર **બકડ** ત્રિકોણ એવો દોર્યો છે, કે **બડ**=**કડ**; તો **અડ**, \angle **બઅક**ને દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

૪. **ક્ષયજ્ઞ** સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના **ચ** અને **જ્ઞ** આ સરખા ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ **મ**માં મળે છે, તો બતાવી આપો કે **મક્ષ**, \angle **ક્ષ**ને દુભાગે છે.

૫. **અબ** પાયાની સામસામી બાણુએ **અબક** અને **અબડ** આ બે સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણ છે; તો બતાવી આપો કે **કડ**, **અબ**ને કાટખુણે દુભાગે છે.

૬. **ડઅ**ની એકજ બાણુએ **ઈડઅ** અને **ફડઅ** આ બે સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણ છે; તો બતાવી આપો કે **ઈફ** વધારી હોય તો તે **ડઅ**ને કાટખુણે દુભાગે.

૭. **અબકડ** ચતુષ્કોણમાં **અડ**=**બક** છે, અને **અક** અને **બડ** કોણો સરખા છે, તો \angle **અકડ**= \angle **બડક** છે એમ સિદ્ધ કરો.

૮. * સમબાણુ ચતુષ્કોણના કોણો તે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણાને દુભાગે છે, અને એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે છે.

૯. **અમબ** અને **કમડ** આ સીધી લીટીઓ એક બીજાને છેદે છે, અને **અમકઈ** તથા **વમડફ** એ સમબાણુ ચતુષ્કોણો છે; તો બતાવી આપો કે **ઈફ** લીટી **મ**માં થઈને જાય છે, અને **અક**, **બડ**ને સમાંતર છે.

૧૦. **અબક**, **અબડ** ત્રિકોણો **અબ**ની એકજ બાણુએ છે. **અક**=**બડ**, **અડ**=**બક**, અને **અડ** તથા **બક**, **મ**માં મળે છે; તો **મઅક** અને **મબડ** ત્રિકોણો એકરૂપ છે એ સિદ્ધ કરો.

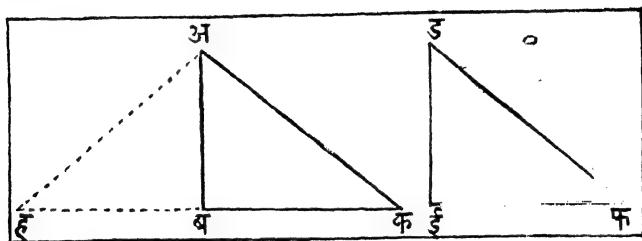
૧૧. * ત્રિકોણની બાણુઓને દુભાગનારા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે.

૧૨. કોઈ પણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાણુઓ પર દોરેલા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે. (ઉપલક્ષ

૧૧મા પ્રશ્ન અને ૧૧મા પ્રમેય પરના ૧૮મા પ્રશ્નને આધારે આ સિદ્ધ કરો.)

પ્રમેય ૧૫.

જો કોઈ કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ અનુક્રમે બીજા કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ અને એક બાજુની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—અવક અને ડઈફ બે કાટખુણ ત્રિકોણ છે; તેમના અક અને ડફ કર્ણો સરખા છે, અને અવ=ડઈ છે.

સાધ્ય— $\triangle અવક \equiv \triangle ડઈફ$.

સિદ્ધતા— \therefore અવ=ડઈ, (પક્ષ.)

$\therefore \triangle ડઈફ$ એવી રીતે મૂકી શકાય કે ડ, અ પર પડે; ઈ, બ પર પડે; અને ફ, કની વિરુદ્ધ દિશામાં પડે. ધારો કે ફ,હ આગળ પડે છે.

હવે $\therefore \angle અવક = ૧$ કાટખુણો, અને $\angle અવહ = ૧$ કાટખુણો; (પક્ષ.)

$\therefore \angle અવક + \angle અવહ = ૨$ કાટખુણો.

\therefore હવક એક સીધી લીટી છે. (પ્ર. ૨)

\therefore અહક ત્રિકોણમાં અક=અહ,

$\therefore \angle અકવ = \angle અહવ;$ (પ્ર. ૧૨)

પણ \angle અહબ એટલે \angle ડફઈજ છે,

$\therefore \angle$ અબક $= \angle$ ડફઈ,

હવે અબક, ડફઈ ત્રિકોણોમાં—

\angle બ $= \angle$ ઈ; (પક્ષ.)

\angle ક $= \angle$ ફ; (ઉપર સિદ્ધ કર્યો છે.)

અબ $=$ ડફઈ, (પક્ષ.)

$\therefore \triangle$ અબક $\equiv \triangle$ ડફઈ. (પ્ર. ૧૧.)

૧૫મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * ખુણાના બંને ભુજોથી સરખે અંતરે આવેલું કોઈ પણ બિંદુ તે ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાં હોય છે.

૨. અબક ત્રિકોણમાં અબ $=$ અક; અને અડ, બક પર લંબ છે; તો \triangle અબડ $\equiv \triangle$ અકડ.

૩. જો ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુમાંથી બાકીની બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિ-બાજુ હોય છે.

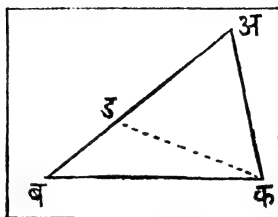
૪. * જો ત્રિકોણના બે ખુણાનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિ-બાજુ હોય છે.

૫. * અબક ત્રિકોણના બ અને ક ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તો બતાવી આપો કે અમ, અ ખુણાને દુભાગે છે. (એટલે ત્રિકોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે એ સિદ્ધ કરો.)

૬. અબક ત્રિકોણની અબ, અક બાજુઓ વધારવાથી બનેલા બહારના ખુણા બ અને કને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તો અમ, \angle બઅકને દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

પ્રમેય ૧૬.

જો ત્રિકોણની બે બાજુઓ નાની મોટી હોય,
તો મોટી બાજુની સામેનો ખુણો મોટો હોય છે.



પક્ષ—અબક એક ત્રિકોણ છે, તેમાં અબ > અક.

સાધ્ય— $\angle ક > \angle બ$.

રચના—અબમાંથી અક જેવડો અડ કકડો કાપી કાઢો.
ડક સાંધો.

સિદ્ધતા—

\therefore અડક ત્રિકોણમાં અડ = અક, (રચના)

$\therefore \angle અડક = \angle અકડ$. (પ્ર. ૧૨)

$\therefore \angle અડક$ એ બડક ત્રિકોણનો બહારનો ખુણો છે;

$\therefore \angle અડક > \angle બ$. (પ્ર. ૮, ઉપ. ૩)

પણ $\angle અડક = \angle અકડ$.

$\therefore \angle અકડ > \angle બ$.

અને $\therefore \angle ક > \angle અકડ$,

$\therefore \angle ક > \angle બ$.

૧૬મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. ૧૬ મા પ્રમેયની આકૃતિમાં (૧) કડ, \angle અને ડ-
બાગનારી લીટી પર લંબ છે; (૨) $\angle ડકબ = \frac{1}{2} (\angle ક - \angle બ)$; અને (૩) $\angle અકડ = \frac{1}{2} (\angle બ + \angle ક)$; એમ
સિદ્ધ કરી બતાવો.

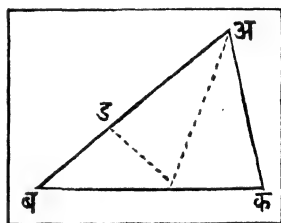
૨. અવકડ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં અવ > અડ;
તો \angle અડવ > \angle વડક એ સિદ્ધ કરો.

૩. એક ચતુષ્કોણની અવ, વક, કડ, ડઅ બાજુઓ
જો અનુક્રમે નાની થતી જાય, તો \angle કડઅ > \angle કવઅ,
એ બતાવી આપો.

૪. * ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુની પાસેના ખુણા
સંમેશ સાંકડા હોય છે.

૫. અવકડ ચતુષ્કોણની સૌથી નાની બાજુ અવ છે,
અને કડ સૌથી મોટી છે; તો \angle વ > \angle ડ અને
 \angle અ > \angle ક છે એમ સિદ્ધ કરી બતાવો.

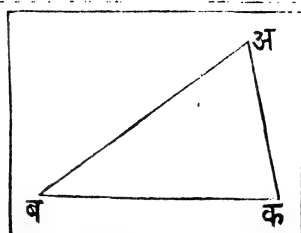
૬. પાસેની આકૃતિમાં
આપેલા અવક ત્રિકોણનો
અ ખુણો દુભાગો અને
અકની બરાબર અડ ભાગ
કાપી કાઢો; અને એ
આકૃતિની મદદથી ૧૬મે
પ્રમેય સિદ્ધ કરો.



૭. ત્રિકોણની એક બાજુ બીજીથી મોટી હોય, તો ત્રિ-
કોણના શિરોબિંદુને પાયાના મધ્યબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી,
ત્રિકોણની મોટી બાજુ અને પાયાની સામેના ખુણો દુભાગ-
નારી લીટી એ બેની વચ્ચે હોય છે.

પ્રમેય ૧૭.

ત્રિકોણના બે ખુણા નાના મોટા હોય, તો મોટા
ખુણાની સામેની બાજુ (નાના ખુણાની સામેની
બાજુ કરતાં) મોટી હોય છે.



પક્ષ—અબક ત્રિકોણમાં $\angle ક > \angle બ$.

સાધ્ય—અબ $>$ અક.

સિદ્ધતા—

જો અબ, અકથી મોટી ન હોય, તો તે અકની બરાબર કે તેથી નાની હોવી જોઈએ.

બરાબર હોય તો $\angle બ = \angle ક$. (પ્ર. ૧૨.)

નાની હોય તો $\angle ક < \angle બ$. (પ્ર. ૧૬.)

પણ આ બંને બાબતો પક્ષની વિરુદ્ધ છે;

\therefore અબ $>$ અક.

ઉપસિદ્ધાંત—ત્રિકોણમાંના સૌથી મોટા ખુણાની સામેની બાજુ સૌથી મોટી હોય છે, અને સૌથી નાના ખુણાની સામેની બાજુ સૌથી નાની હોય છે.

ઉપલા પ્રમેયની સિદ્ધતા એ ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતાનું ઉદાહરણ છે.

પ્રમેયના સાધ્યમાંની બાબત મોટી છે એમ ધારવાથી પક્ષ સાથે અથવા પહેલાં સિદ્ધ કરેલી બાબતો સાથે વિરોધ આવે છે, એમ બતાવવું, તેને ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતા કહે છે.

ઉપલા પ્રમેયની ક્રમિક સિદ્ધતા નીચેની રચના કરીને આપી શકાય છે:—

અબને છેદનારી કક્ષ લીટી એવી દોરો, કે $\angle બકક્ષ = \frac{1}{2} (\angle ક - \angle બ)$ થાય.

પછી અક્ષ=અક છે એમ બતાવી આપો.

૧૭મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * કાટપુણ ત્રિકોણનો કર્ણ સર્વ બાણુઓથી મોટો હોય છે.

૨. * પહોળપુણ ત્રિકોણમાં પહોળા ખુણાની સામેની બાણુ સૌથી મોટી હોય છે.

૩. અવક ત્રિકોણના પાયાની સામેના અ શિરોબિંદુમાંથી વક પર અડ લંબ દોર્યો હોય, તો બતાવી આપો કે અવ > વડ, અને અક > કડ છે; અને આ પરથી (અવ+અક) > વક છે એમ પણ બતાવી આપો.

૪. અવક ત્રિકોણના વ અને ક ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ ડમાં મળે છે, અને અવ > અક; તો ડવ > ડક એ સિદ્ધ કરો.

૫. અવક ત્રિકોણનાં વ અને ક શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાણુઓ પર દોરેલા લંબો ક્ષ બિંદુમાં મળે છે. હવે જો અવ > અક હોય, તો ક્ષવ > ક્ષક એમ બતાવી આપો.

૬. ત્રિકોણની અવ, અક બાણુઓ વધારવાથી થતા બહારના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ ઈ બિંદુમાં મળે છે. હવે જો અવ > અક, તો ઈવ < ઈક એ સિદ્ધ કરો.

૭. અવક ત્રિકોણની અવ, અક સરખી બાણુઓ છે; અને તેમને એક લીટી ક્ષ અને ચ બિંદુઓમાં છેદે છે. વક પાયાને ક તરફ વધાર્યો હોય, તો તેને પણ તે લીટી મળે છે; તો બતાવો કે અચ > અક્ષ.

૮. * સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણનો પાયો વધારીને તેમાંના કોઈ પણ બિંદુ સુધી પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી દોરેલી લીટી દરેક સરખી બાણુથી મોટી હોય છે.

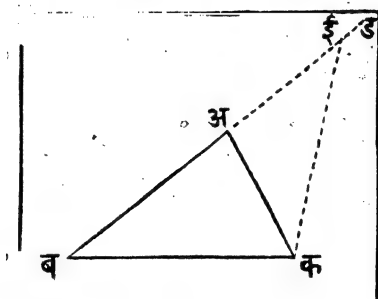
૯. * સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુ-માંથી પાયાના કોઈ પણ બિંદુ સુધી દોરેલી લીટી દરેક સરખી બાણુથી નાની હોય છે.

૧૦. * ત્રિકોણના કોઈ પણ ખુણાને દુભાગનારી લીટીથી સામી બાજુના જે બે ભાગ થાય છે, તેમના દરેક ભાગ તેની પાસેની ત્રિકોણની બાજુથી નાનો હોય છે.

૧૧. * આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર દ્રક્ષ્ય બેજ સરખી લીટીઓ દોરી શકાય છે.

પ્રમેય ૧૮.

ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં વધારે હોય છે.



પક્ષ—અવક એક ત્રિકોણ છે.

સાધ્ય—(૧) (બઅ+અક) > બક;

(૨) (કબ+બઅ) > કઅ; અને

(૩) (અક+કબ) > અબ.

રચના—બઅને ડ સુધી વધારો. અડમાંથી અક જેવડો અઈ કકડો કાપી કાઢો. કઈ સાધો.

સિદ્ધતા—

∴ બઈક ત્રિકોણમાં અઈ=અક, (રચના.)

∴ ∠અકઈ=∠અઈક. (પ્ર. ૧૨.)

પણ ∠બકઈ > ∠અકઈ,

∴ ∠બકઈ > ∠અઈક.

હવે ર્ઘક ત્રિકોણમાં $\therefore \angle \text{વકર્ઘ} > \angle \text{વર્ઘક},$
 $\therefore \text{વર્ઘ} > \text{વક.}$ (પ્ર. ૧૭)

એટલે (વઅ+અર્ઘ) $>$ વક.

પણ અર્ઘ=અક, (૨૨ના.)

$\therefore (\text{વઅ+અક}) > \text{વક.}$

એજ રીતે (કવ+વઅ) $>$ કઅ, અને (અક+કવ) $>$ અવ, એ સિદ્ધ કરી શકાય.

ઉપસિદ્ધાંત—કોઈ પણ ત્રિકોણની બે બાજુની બાદબાકી ત્રીજી બાજુથી ઓછી હોય છે.

સિદ્ધતા—

(અવ+અક) $>$ વક. (પ્ર. ૧૮.)

દરેક બાજુમાંથી અક બાદ કરો.

$\therefore \text{અવ} > (\text{વક}-\text{અક}).$

૧૮મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અ ખુણો હુલાગીને ૧૮મો પ્રમેય સિદ્ધ કરો.

૨. ચતુષ્કોણની કોઈ પણ ત્રણ બાજુનો સરવાળો ચોથી બાજુથી વધારે હોય છે.

૩. બહુકોણની કોઈ પણ એક બાજુ બાકીની બધી બાજુઓના સરવાળા કરતાં ઓછી હોય છે.

૪. * ચતુષ્કોણના કર્ણોનો સરવાળો તેની પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે.

૫. * કોઈ પણ બિંદુમાંથી ત્રિકોણનાં ત્રણે શિરોબિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓનો સરવાળો ત્રિકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૬. કોઈ પણ બિંદુમાંથી બહુકોણનાં સર્વ શિરોબિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓનો સરવાળો તે બહુકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૭. અબક ત્રિકોણમાં ડ બિંદુ એવું લીધું છે, કે અડ=

અવ છે; **બઅડ** ખુણાને દુભાગનારી લીટી **વક**ને રૂમાં મળે છે; તો **વર્ફ=ર્ફડ** છે એમ ખતાવી આપો, અને તે ઉપરથી **વક > કડ** છે એમ સિદ્ધ કરો.

૮. અવક ત્રિકોણની અક બાજુમાં ગમે ત્યાં એક **ડ** બિંદુ છે; તો ખતાવી આપો કે **વઅ+અક > વડ+ડક**.

૯. અવક ત્રિકોણમાં ગમે ત્યાં એક **ડ** બિંદુ છે; તો ખતાવી આપો કે **વઅ+અક > વડ+ડક**.

૧૦. * વર્તુળની કોઈ પણ બ્યા વ્યાસથી નાની હોય છે.

૧૧. અક પાયા પર અવક ત્રિકોણ અને અપચક ચતુષ્કોણ છે; **પ,ચ** બિંદુઓ ત્રિકોણની અંદર છે; તો ત્રિકોણની પરિમિતિ ચતુષ્કોણની પરિમિતિથી મોટી છે એમ ખતાવી આપો.

૧૨. ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલી મધ્યગા અને પાયાનું અર્ધ એ બેનો સરવાળો, પાયાની સામેનો ખુણો કરનારી બે બાજુના સરવાળાના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૩. * ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરવાળો, તે બે બાજુઓના મેલનબિંદુમાંથી દોરેલી મધ્યગાની બમણાઈ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૪. * કોઈ પણ ત્રિકોણની ત્રણ મધ્યગાઓનો સરવાળો ત્રિકોણની પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે.

૧૫. * કોઈ પણ ત્રિકોણની પરિમિતિ ત્રણ મધ્યગાઓના સરવાળાની બમણાઈ કરતાં ઓછી હોય છે.

૧૬. અવકડ ચતુષ્કોણની અંદર **મ** એક બિંદુ છે; તો ખતાવી આપો કે (**મઅ+મવ+મક+મડ**) > (**અક+વડ**.)

૧૭. * ત્રિકોણમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી તે ત્રિકોણના ત્રણ શિરોબિંદુઓ સુધી દોરેલી સીધી લીટીઓનો સરવાળો (૧) ત્રિકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે; પણ (૨) પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે, એમ ખતાવી આપો.

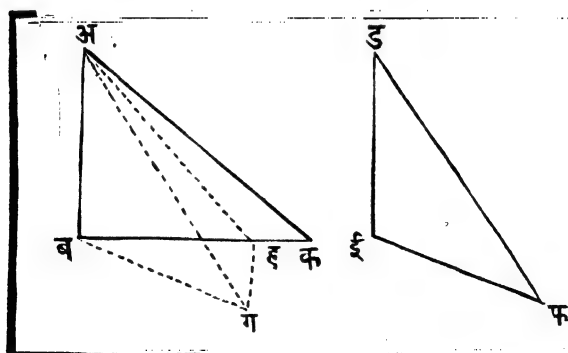
૧૮. ચતુષ્કોણના કર્ણોનો સરવાળો ચતુષ્કોણની પરિમિતિ-
ના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૯. અબક ત્રિકોણમાં બકનું મધ્યબિંદુ ડ છે; જો અડ
< બડ, તો \angle અ પહોળો ખુણો છે એ બતાવી આપો.

૨૦. જો એક ત્રિકોણ બીજા ત્રિકોણની અંદર પુરેપુરી
રીતે મૂકી શકાતો હોય, તો પહેલાની પરિમિતિ બીજાની
પરિમિતિ કરતાં ઓછી હોય છે.

પ્રમેય ૧૯.

જો ત્રિકોણ પૈકી એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે
બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પણ તે
બાજુઓની વચ્ચેના ખુણા નાના મોટા હોય; તો
જે ત્રિકોણમાંનો ખુણો મોટો હોય, તે ત્રિકોણનો
પાયા નાના ખુણાવાળા ત્રિકોણના પાયા કરતાં મોટો
હોય છે.



પક્ષ—અબક અને ડઈફ એ બે ત્રિકોણમાં અબ=ડઈ,
અક=ડફ, અને \angle અ $>$ \angle ડ.

સાધ્ય—બક $>$ ફ.

સિદ્ધતા—

∴ ડઈ=અબ,

∴ ડઈ, અબ પર બરાબર આવી રહેશે.

ડઈફ ત્રિકોણ એવી રીતે મૂકો, કે ડ અને ઈ ખિંદુઓ અ અને બ પર પડે; અને અબની જે બાજુએ ક શિરો-ખિંદુ છે તેજ બાજુએ ફ શિરોખિંદુ પડે. ધારો કે ફ, ગ આગળ પડે છે.

હવે ∴ \angle બઅક $>$ \angle બઅગ, (પક્ષ.)

∴ અગ (ડફ), અબ અને અકની વચ્ચે પડે છે.

\angle બઅકમાંથી \angle બઅગ (\angle ઈડફ) બાદ જતાં બાકી રહેલા \angle કઅગને દુભાગો, અને દુભાગનારી લીટીને હ ખિંદુમાં વકને મળવા દો. હગ સાંધો.

∴ અગહ અને અકહ ત્રિકોણોમાં—

અગ=અક, (પક્ષ.)

અહ બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે,

અને \angle ગઅહ= \angle કઅહ; (રચના.)

∴ બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે. (પ્ર. ૧૦)

∴ હગ=હક.

આ દરેકમાં બહ ઉમેરો.

∴ બહ+હગ=બહ+હક (એટલે વકની બરાબર.)

હવે બહગ ત્રિકોણમાં—

∴ બહ+હગ $>$ બગ; (પ્ર. ૧૮)

અને બહ+હગ=વક;

∴ વક $>$ બગ.

પણ બગ એટલે ઈફજ;

∴ વક $>$ ઈફ.

૧૯મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અવકહ એક ચતુષ્કોણ છે, તેમાં અડ=વક, અને

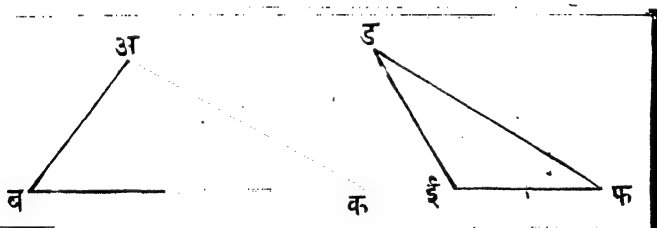
\angle અડક $>$ \angle બકડ; તો બતાવી આપો કે અક $>$ વડ.

૨. અબક ત્રિકોણની અબ અને અક બાજુઓને અનુક્રમે ડ અને ઈ સુધી વધારીને વડ=કઈ કરેલી છે. હવે જો અબ $>$ અક હોય, તો બતાવો કે કડ $>$ વઈ.

૩. અબક ત્રિકોણની બઅ અને કઅ બાજુઓને વધારીને વડ અને કઈ સરખી કરી છે. હવે જો અબ $>$ અક હોય, તો બતાવી આપો કે વઈ $>$ કડ.

પ્રમેય ૨૦.

જો ત્રિકોણ પૈકી એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પરંતુ તેમના પાયા નાના મોટા હોય, તો જે ત્રિકોણનો પાયા મોટો હોય તેના તે પાયાની સામેના ખુણા, જેના પાયા નાના છે તેના પાયાની સામેના ખુણા કરતાં મોટો છે.



પક્ષ—અબક અને ડઈફ ત્રિકોણોમાં અબ=ડઈ, અક=ડફ, અને બક $>$ ઈફ.

સાધ્ય— \angle અ $>$ \angle ડ.

સિદ્ધતા—

જો \angle અ $>$ \angle ડ ન હોય, તો \angle અ= \angle ડ હોવો જોઈએ, અથવા \angle અ $<$ \angle ડ હોવો જોઈએ.

હવે $\angle અ = \angle ડ$ હોય, તો

બક = ઈફ,

(પ્ર. ૧૦)

અને $\angle અ < \angle ડ$ હોય, તો

બક < ઈફ.

(પ્ર. ૧૯)

પણ આ બંને બાબતો પક્ષથી વિરુદ્ધ છે,

એટલે $\angle અ, \angle ડ$ ની બરાબર પણ નથી અને તેથી નાનો પણ નથી.

$\therefore \angle અ > \angle ડ$.

૨૦મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અબક ત્રિકોણમાં અબ > અક; બક, ડમાં દુભાગેલી છે; તો અડક સાંકડો ખુણો છે એમ બતાવી આપો.

૨. અબક ત્રિકોણની બક બાહુનું ડ મધ્યબિંદુ છે. અડમાં ગમે ત્યાં ઈ બિંદુ લીધેલું છે; તો એમ બતાવો કે બે અબ > અક હોય, તો ઈબ > ઈક છે.

૩. અબક ત્રિકોણની વઅ, કઅ બાહુઓમાંથી વડ, કઈ સરખા કડકા કાપી કાઢ્યા છે. હવે બે વઈ > કડ હોય, તો અબ > અક છે એમ બતાવી આપો.

૪. અબકડ ચતુષ્કોણમાં અડ = બક. હવે એમ બતાવી આપો કે બે

(૧) અક > વડ હોય, તો $\angle અડક > \angle બકડ$;

(૨) અબ < કડ હોય, તો $\angle અકબ < \angle ડઅક$;

(૩) $\angle અડક > \angle બકડ$ હોય, તો $\angle અબક >$

$\angle વઅડ$.

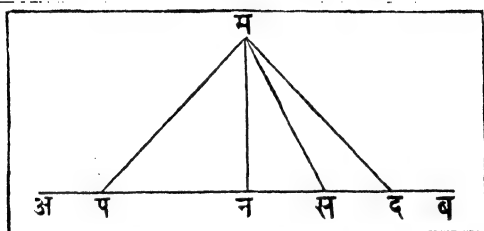
પ્રમેય ૨૧.

આપેલી લીટીની બહારના બિંદુમાંથી તે લીટી પર જે લીટીઓ દ્વારા શકાય તે પૈકી—

(૧) લંબ સૌથી નાની લીટી હોય છે,

(૨) લંબની સાથે સરખા ખુણા કરનારી લીટી-ઓ સરખી હોય છે, અને

(૩) લંબની સાથે મોટા ખુણા કરનારી લીટી, નાના ખુણા કરનારી લીટી કરતાં મોટી હોય છે.



પક્ષ—અબ આપેલી લીટી છે. તે લીટીની બહાર મ આપેલું બિંદુ છે.

(૧) મન, અબ પર લંબ છે; અને મપ, અબને પમાં મળનારી લીટી છે. (૨) $\angle નમપ = \angle નમદ$. (૩) $\angle નમપ > \angle નમસ$.

સાધ્ય—(૧) મન સૈથી નાની લીટી છે.

સિદ્ધતા—

\therefore મપન ત્રિકોણની પન બાજુ બ સુધી વધારી છે,

$\therefore \angle મનબ > \angle મપન$. (પ્ર. ૮, ઉ. સિ. ૩)

અને $\angle મનબ = ૧$ કાટખુણો (અને તેટલા

મોટા) $= \angle મનપ$,

$\therefore \angle મનપ > \angle મપન$.

$\therefore મપ > મન$.

(પ્ર. ૧૭)

એજ રીતે મમાંથી અબ સુધી દોરેલી બીજી કોઈ પણ લીટી કરતાં મન નાની છે એમ સિદ્ધ કરી શકાશે.

સાધ્ય—(૨) મપ = મદ.

સિદ્ધતા—

∴ મપન, મદન ત્રિકોણોમાં

$$\left. \begin{array}{l} \angle \text{મનપ} = \angle \text{મનદ,} \\ \angle \text{નમપ} = \angle \text{નમદ,} \end{array} \right\} \quad (\text{પક્ષ.})$$

મન બાબુ બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે;

∴ મપ=મદ. (પ્ર. ૧૧)

સાધ્ય—(૩) મપ > મસ.

સિદ્ધતા—

∴ મદસ ત્રિકોણની દસ બાબુ પ સુધી વધારી છે,

∴ $\angle \text{મસપ} > \angle \text{મદપ}$. (પ્ર. ૮, ઉ. ૩)

અને ∴ મપ=મદ,

∴ $\angle \text{મદપ} = \angle \text{મપદ} (= \angle \text{મપસ.})$ (પ્ર. ૧૨)

∴ $\angle \text{મસપ} > \angle \text{મપસ};$

∴ મપ > મસ. (પ્ર. ૧૭)

ઉપસિદ્ધાંત ૧—લીટીની બહારના કોઈ પણ બિંદુ-
માંથી તે લીટી સુધી બેજ સરખી લીટીઓ દોરી
શકાય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—કોઈ પણ બિંદુમાંથી કોઈ પણ
લીટી સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે પૈકી સૌથી
નાની લીટી તે લીટી પર લંબ હોય છે.

૨૧મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

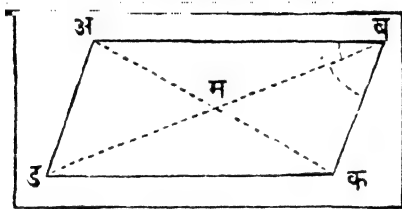
૧. * એક ત્રિકોણની બે બાબુઓ અને તે પૈકી એક
બાબુની સામેના ખુણા-એટલા અવયવો બીજા ત્રિકોણના
એમને મળતા અવયવોની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એક-
રૂપ હોય છે; અથવા તે ત્રિકોણોની સરખી બાબુઓની
સામેના ખુણા ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.

૨. ઉપલા પ્રશ્નમાં એમ બતાવી આપો, કે આપેલા સરખા
ખુણા પહોળા હોય, તો બંને ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.

પ્રમેય ૨૨.

સમાંતરબાજી ચતુષ્કોણમાં—

- (૧) સામસામા ખુણા સરખા હોય છે;
- (૨) સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે;
- (૩) દરેક કર્ણ સમાંતરબાજી ચતુષ્કોણને દુભાગે છે; અને
- (૪) બંને કર્ણ એકબીજાને દુભાગે છે.



પ્રશ્ન—અવકડ સમાંતરબાજી ચતુષ્કોણ છે. અક,બડ તેના કર્ણ છે.

સાધ્ય—(૧) $\angle A = \angle C$, અને $\angle B = \angle D$.

(૨) અડ=બક અને અબ=ડક.

(૩) અક અને બડ કર્ણો અવકડ સમાંતરબાજી ચતુષ્કોણને દુભાગે છે;

(૪) અક અને બડ કર્ણો એક બીજાને મમાં દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—(૧)

\therefore અડ \parallel બક, અને તેમને બડ મળે છે,

$\therefore \angle કબડ = \text{વ્યુત્ક્રમ } \angle અડબ. (પ. ૬.)$

તેમજ \therefore અબ \parallel ડક, અને ડબ તેમને મળે છે,

$\therefore \angle અબડ = \text{વ્યુત્ક્રમ } \angle કડબ. (પ. ૬.)$

$\therefore \angle અબડ + \angle કબડ = \angle કડબ + \angle અડબ.$

$\therefore \angle ડ = \angle બ.$

એજ રીતે $\angle અ = \angle ક$ છે એમ બતાવી શકાશે.

(૨)

\therefore અબડ, કડબ ત્રિકોણોમાં—

$$\angle અડબ = \angle કબડ;$$

$$\angle અબડ = \angle કડબ;$$

અને બડ અને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે;

$$\therefore \triangle અબડ \equiv \triangle કડબ. \quad (પ. ૧૧.)$$

$$\therefore અડ = બક, \text{ અને } અબ = ડક.$$

(૩)

$$\therefore \triangle અબડ \equiv \triangle કડબ, \text{ (ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે.)}$$

\therefore બડ કર્ણથી અબકડ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના બે સરખા ભાગ થયા છે. તેમજ $\triangle અડક \equiv \triangle અબક$ એમ બતાવી શકાશે.

(૪)

$$\therefore \triangle મઅડ \text{ અને } \triangle મકબમાં$$

$$\angle અડમ = \angle કબમ, \quad (પ. ૬.)$$

$$\angle અમડ = \angle કમબ, \quad (પ. ૩.)$$

$$અડ = બક,$$

$$\therefore \triangle અમડ \equiv \triangle બમક. \quad (પ. ૧૧.)$$

$$\therefore મઅ = મક, \text{ અને } મડ = મબ.$$

એટલે, અક અને બડ કર્ણો એક બીજાને મમાં દુભાગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર (લંબાંતર) બધે ઠેકાણે સરખું હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણનો એક ખુણો કાટખુણો હોય, તો બાકીના બધા ખુણા કાટખુણા હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણની પાસ-

પાસેની કોઈ પણ બે બાજુઓ સરખી હોય, તો સર્વ બાજુઓ સરખી હોય છે.

૨૨મા અમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના પાસપાસેના બે ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજા સાથે કાટખુણો કરે છે.

૨. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ સમાંતર હોય છે.

૩. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કોણોના છેદનબિંદુમાંથી સામસામી બાજુ સુધી દોરેલી કોઈ પણ લીટીના તે બિંદુમાં સરખા ભાગ થાય છે.

૪. અબકડ ચતુષ્કોણમાં $\text{અબ}=\text{અડ}$ છે, પણ તેઓ સમાંતર નથી; અને અબ \parallel ડક છે; $\angle \text{ક}=\angle \text{ડ}$ એમ બતાવી આપો.

૫. ઉપલા પ્રશ્નની આકૃતિમાં જો ઈ અને ફ અતુકમે અબ અને કડનાં મધ્યબિંદુ હોય, તો ઈફ , અબ પર લંબ છે એમ બતાવી આપો.

૬. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો દરેક કર્ણ સામાં શિરો-બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૭. એક ચતુષ્કોણની બે બાજુઓ સમાંતર છે, અને બીજી બે બાજુઓ સરખી છે; તો તેમાંનો કોઈ પણ ખુણો સામા ખુણાની બરાબર છે અથવા તેનો ન્યૂનતાપૂરક છે એમ બતાવી આપો.

૮. * જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કોણો સરખા હોય છે તે કાટખુણ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૯. જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કોણો એક બીજા પર લંબ હોય છે, તેની સર્વ બાજુઓ સરખી હોય છે.

૧૦. જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કોણો સમાન હોઈને એક બીજા પર લંબ હોય, તો તે ચોરસ હોય છે.

૧૧. અવ પાયા પર અને તેની વિરુદ્ધ બાજુએ અવકાશ, અર્થાત્ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એવા દોર્યા, કે પહેલાની અડ બાજુ બીજાના અર્ધ કર્ણ બરાબર છે, અને પહેલાનો અર્ધ કર્ણ બીજાની અર્ધ બાજુ બરાબર છે; તો એમ સિદ્ધ કરો કે:—

(૧) ક, અ, ફ બિંદુઓ } એકજ સીધી લીટીમાં છે.
અને (૨) ડ, અ, ઈ બિંદુઓ }

૧૨. અવકાશ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના અર્ધ કર્ણમાં ઈ બિંદુ એવું લીધું છે, કે ઈબ=ઈડ છે; તો ઈ, અકતું મધ્યબિંદુ છે એમ બતાવી આપો. આનો કોઈ અપવાદ હોય તો કહો.

૧૩. અવકાશ ત્રિકોણની બધી બાજુમાં ઈ અને ફ બે બિંદુઓ દો. અવકાશમાં પ બિંદુ અને અકમાં વ બિંદુ કેવી રીતે લીધાં હોય, તો પદ લીટી ઈફની બરાબર અને તેને સમાંતર થાય ?

૧૪. * સમઘનબાજુ ત્રિકોણના પાયામાંના ગમે તે બિંદુ-માંથી સરખી બાજુઓ પર દોરેલા લંબોનો સરવાળો, પાયાના એક છેડામાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબની બરાબર હોય છે.

૧૫. સમબાજુ ત્રિકોણની અંદરના ગમે તે બિંદુમાંથી ત્રણ બાજુઓ પર દોરેલા લંબોનો સરવાળો, તે ત્રિકોણના કોઈ પણ શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબની બરાબર હોય છે.

પ્રમેય ૨૩.

કોઈ પણ ચતુષ્કોણમાં બે—

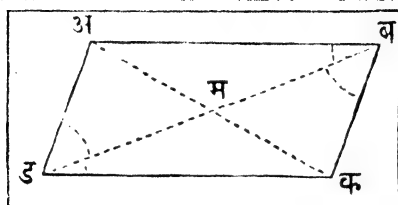
(૧) સામસામી બાજુઓ પૈકી, એક બેડમાંની બે લીટીઓ સરખી અને સમાંતર હોય, અથવા

(૨) સામસામી બાજુઓની દરેક બેડમાંની બાજુઓ સરખી હોય, અથવા

(૩) સામસામા ખુણા સરખા હોય, અથવા

(૪) કોઈ એક બીજાને દુભાગતા હોય,

તો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાહુ હોય છે.



(૧)

પક્ષ—અબકડ ચતુષ્કોણમાં અબ, ડક સરખી અને સમાંતર છે.

સાધ્ય—અબકડ સમાંતરબાહુ ચતુષ્કોણ છે.

રચના—અ,ક સાંધો.

સિદ્ધતા—

હવે \therefore અબ \parallel ડક, (પક્ષ.)

અને તેમને અક મળે છે,

$\therefore \angle$ બઅક $=$ વ્યુત્ક્રમ \angle અકડ. (પ્ર. ૬.)

હવે $\therefore \triangle$ અબક, અને \triangle કડઅમાં,

અબ $=$ કડ; (પક્ષ.)

અક સાધારણ છે;

\angle બઅક $=$ \angle અકડ;

\therefore આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર. ૧૦.)

$\therefore \angle$ અકબ $=$ \angle કઅડ.

અને \therefore આ વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે,

\therefore બક \parallel અડ. (પ્ર. ૪)

\therefore અબકડ સમાંતરબાહુ ચતુષ્કોણ છે.

(૨)

પક્ષ—અવ=કડ, અને વક=અડ.

સાધ્ય—અવકડ સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—

 $\therefore \triangle$ અવક, \triangle કડઅ માં

અવ=કડ,

(પક્ષ.)

વક=અડ,

”

અક સાધારણ છે;

 $\therefore \triangle$ અવક $\equiv \triangle$ કડઅ. (પ્ર. ૧૪) $\therefore \angle$ વઅક = \angle ડકઅ, અને \angle વકઅ = \angle કઅડ. \therefore અવ \parallel ડક, અને વક \parallel અડ. (પ્ર. ૪) \therefore અવકડ સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણ છે.

(૩)

પક્ષ— \angle અ = \angle ક, અને \angle વ = \angle ડ.

સાધ્ય—અવકડ સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—

 $\therefore \angle$ અ = \angle ક, અને \angle વ = \angle ડ, (પક્ષ.) $\therefore \angle$ અ + \angle વ = \angle ક + \angle ડ;એટલે \angle અ + \angle વ એ સરવાળો \angle અ + \angle વ + \angle ક + \angle ડ નું અર્ધ છે.અને \therefore અવકડ એક ચતુષ્કોણ છે, $\therefore \angle$ અ + \angle વ + \angle ક + \angle ડ = ૪ કાટખુણા,

(પ્ર. ૮, ઉ. ૬.)

 $\therefore \angle$ અ + \angle વ = ૨ કાટખુણા, \therefore અડ \parallel વક.

(પ્ર. ૫)

એજ પ્રમાણે અવ \parallel ડક છે એમ બતાવી શકાશે. \therefore અવકડ સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણ છે.

(૪)

પક્ષ—અક, વડ એક ખીજાને મમાં દુભાગે છે.

સાધ્ય—અવકડ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—

∴ \triangle અમડ અને \triangle કમવ માં—

અમ=કમ, (પક્ષ.)

ડમ=વમ,

\angle અમડ = \angle કમવ, (પ્ર. ૩)

∴ આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર. ૧૦)

∴ અડ=વક; અને

∴ \angle અડમ = \angle વ્યુત્કમ \angle કવમ,

∴ અડ ॥ વક. (પ્ર. ૪)

∴ અવકડ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(પ્ર. ૨૩, પ્રકાર ૧)

૨૩મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * સરખી ઉંચાઈના ત્રિકોણો અથવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો, સમાંતર લીટીઓની એકજ જોડ વચ્ચે મૂકી શકાય છે.

૨. અવકડ ચતુષ્કોણમાં \angle અ, \angle વ, \angle ડ અનુક્રમે ૬૦° , ૧૨૦° , ૧૨૦° ના છે; તો \angle ક કેવડો? અવકડ કઈ જાતનો ચતુષ્કોણ છે?

૩. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી સીધી લીટી ખીજી બે બાજુઓને સમાંતર હોય છે.

૪. * કાટખુણ ચતુષ્કોણના કર્ણો સરખા હોય છે.

૫. * ચોરસના અને તેમજ સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક ખીજા પર લંબ હોય છે.

૬. * સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો તેના ખુણાઓને દુભાગે છે.

૭. * ચતુષ્કોણના કર્ણો સમાન હોઈને જો તે એક બીજને કાટખુણે દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ ચોરસ હોય છે.

૮. * જો ચતુષ્કોણના કર્ણો નાના મોટા હોઈને એક બીજને કાટખુણે દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ સમબાજુ હોય છે.

૯. (૧) કાટખુણ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજને દુભાગે છે. (૨) સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજ પર લંબ હોય છે, એક બીજને દુભાગે છે, અને તે સમબાજુ ચતુષ્કોણના ખુણાઓને પણ દુભાગે છે. (૩) ચોરસના કર્ણો સરખા હોય છે, તે એક બીજ પર લંબ હોય છે, એક બીજને દુભાગે છે, અને તે ચોરસના ખુણાને પણ દુભાગે છે.

૧૦. અબકડ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને અબ, કડ બાજુઓ ક્ષ અને ચ બિંદુમાં દુભાગેલી છે; તો બીજા બે બક્ષડય સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

૧૧. * જો ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુઓ સરખી અને એક ખુણો કાટખુણો હોય છે, તે ચોરસ હોય છે.

૧૨. અબકડ ચતુષ્કોણમાં $\angle અ = \angle વ$ અને $\angle ક = \angle ડ$ છે; તો આ ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓની એક જોડમાંની બાજુઓ સરખી છે, અને બીજી જોડમાંની બાજુઓ સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૧૩. અબકડ એક ચતુષ્કોણ છે; બકડવ, કડઅવ, ડઅવર, અને અબકસ એ ચાર સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો છે; તો અવ, વડ, કર, ડસ સરખી અને સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

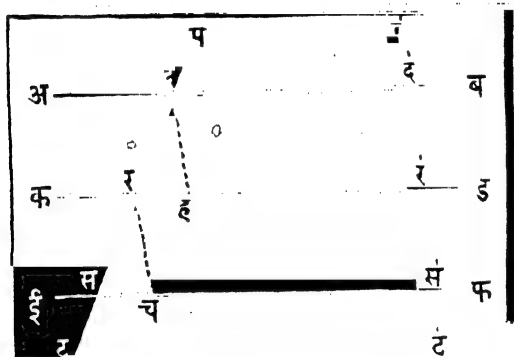
૧૪. જો ચતુષ્કોણના દરેક શિરોબિંદુથી બીજા શિરોબિંદુઓ સુધીનાં અંતરોનો સરવાળો સરખો હોય, તો તે ચતુષ્કોણ કાટખુણ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૧૫. અબકડ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને તેમાં ગમે ત્યાં એક મ બિંદુ છે. મઅઈવ, મવફક, મકગડ,

મહાઅ આ સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણ દોર્યા હોય, તો ફફગહ સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણ છે, અને તે અબકડથી બમણો છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૨૪.

જો ત્રણ અથવા ત્રણથી વધારે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદનારી એક લીટીના તે સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના ગાળાઓ સરખા હોય, તો તે સમાંતર લીટીઓને છેદનારી બીજી કોઈ પણ લીટીના તેવા ગાળાઓ પણ સરખા હોય છે.



પક્ષ—અબ, કડ, ફફ સમાંતર સીધી લીટીઓ છે; તેમને પટ સીધી લીટી અનુક્રમે દ,ર,સમાં છેદે છે; અને દર=રસ. બીજી કોઈ પણ પટ સીધી લીટી આ સમાંતર સીધી લીટીઓને દ,ર,સમાં છેદે છે.

સાધ્ય—દર=રસ.

રચના—પરંતે સમાંતર દહ, રચ દોરો, અને ધારો કે તે કડ, ફફને હ અને ચમાં મળે છે.

સિદ્ધતા—

હવે ∴ કહ ॥ ર્ફ, (પક્ષ.)

∴ ∠દરહ=અંગત ∠રસચ. (પ્ર. ૬.)

∴ દહ, રચ અને ॥ પર,

∴ દહ ॥ રચ. (પ્ર. ૭.)

∴ દરસ તેમને છેદે છે,

∴ રદહ=અંગત ∠સરચ. (પ્ર. ૬.)

∴ Δદરહ અને Δરસચમાં—

∠દરહ=∠રસચ;

∠રદહ=∠સરચ;

દર=રસ;

(પક્ષ.)

∴ આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

∴ દહ=રચ.

દહ ॥ દર, અને દદ ॥ હર,

∴ દહરદ સમાંતરઆણુ ચતુષ્કોણ છે.

તેમજ રચસર પણ સમાંતરઆણુ ચતુષ્કોણ છે.

∴ દહ=દર અને રચ=રસ. (પ્ર. ૨૨.)

પણ દહ=રચ,

∴ દર=રસ.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—જો ત્રિકોણની કોઈ બાજુના મધ્ય-બિંદુમાંથી પાયાને સમાંતર લીટી દારી હોય, તો તે બીજી બાજુને દુભાગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્ય-બિંદુઓને સાંધનારી લીટી ત્રીજી બાજુને (૧) સમાંતર હોય છે અને (૨) તેનાથી અર્ધી હોય છે.

૨૪મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી-

ઐથી તે ત્રિકોણના જે ચાર ત્રિકોણ થાય છે, તે એક-રૂપ હોય છે.

૨. અવક ત્રિકોણની અવ અને અક બાજુઓમાં અનુ-ક્રમે $\sqrt{3}$ અને $\sqrt{3}$ બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે અક = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ અવ, અને અઈ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ અક; તો $\sqrt{3}$ અવ, અકનો એક ચતુર્થાંશ છે અને તેને સમાંતર છે એ બતાવી આપો.

૩. * ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધવાથી બનેલી આકૃતિ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે, એ બતાવી આપો.

૪. * ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ એક બીજીને દુભાગે છે.

૫. ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ, અને તેના કર્ણોનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી, એક બિંદુમાં મળે છે અને તેમાંજ દુભાગાય છે.

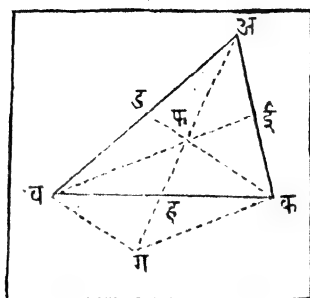
૬. * કાટખુણુ ત્રિકોણના કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી દોરેલી મધ્યગા કર્ણના અર્ધ જેટલી હોય છે.

૭. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુને તેની સામી બાજુનાં શિરોબિંદુઓની સાથે સાંધનારી બે લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો જે કાટખુણો હોય, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુ બીજીથી બમણી હોય છે.

૮. ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓનાં સ્થાન આપેલાં છે, તો તે ત્રિકોણ દોરો.

પ્રમેય ૨૫.

ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે, અને આ બિંદુથી મધ્યગાઓના જે બે ભાગ થાય છે, તેમાંથી શિરોબિંદુ તરફનો ભાગ બીજા ભાગથી બમણો હોય છે.



પક્ષ—અવક એક ત્રિકોણ છે, અને તેની બહુ અને કડ મધ્યગા એક બીજાને ફ બિંદુમાં છેદે છે.

સાધ્ય—(૧) અહ મધ્યગા ફ બિંદુમાં થઈને જાય છે;

(૨) અફ=૨ફહ; વફ=૨ફઈ; કફ=૨ફડ.

સિદ્ધતા—

(૧) (અ,ફ બિંદુઓમાં થઈને જનારી સીધી લીટી મધ્યગા છે એમ સિદ્ધ થાય, તો ત્રણે મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં થઈને જાય છે એ સિદ્ધ થાય.)

રચના—અ,ફ સાંધો. અફ લીટીને વધારીને તેનો વધારેલો ફગ ભાગ અફની બરાબર કરો. વગ અને કગ સાંધો.

∴ \triangle અવગની અવ અને અગ બાજુઓનાં મધ્ય-બિંદુઓ અનુક્રમે ડ અને ફ છે; (પક્ષ અને રચના)

∴ ડફ, વગને સમાંતર છે અને વગના અર્ધ બરાબર છે. (પ્ર. ૨૪, ઉ. સિ. ૨)

એજ પ્રમાણે અકગ ત્રિકોણની અગ અને અક બાજુઓનાં અનુક્રમે ફ અને ઈ મધ્યબિંદુઓ છે; (રચના અને પક્ષ.)

∴ ફઈ, ગકને સમાંતર છે અને ગકના અર્ધ બરાબર છે. (પ્ર. ૨૪, ઉ. સિ. ૨)

હવે ∴ ડક ॥ વગ,

અને વઈ ॥ ગક,

∴ બગકફ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણુ છે.

અને ∴ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણુના કર્ણ એક બીજને દુભાગે છે;

∴ બક અને ફગનું હ મધ્યબિંદુ છે.

હવે ∴ હ, બકનું મધ્યબિંદુ છે,

∴ અફહ મધ્યગા છે, અને તે ફમાં થઈને જાય છે એ સ્પષ્ટ છે.

∴ ત્રિકોણની ત્રણે મધ્યગા એકજ બિંદુમાં મળે છે એ સ્પષ્ટ થાય છે.

(૨)

∴ ફહ=ફગ,

∴ ફગ=૨ ફહ.

પણ ફગ=અફ,

(રચના.)

∴ અફ=૨ ફહ.

એજ પ્રમાણે બફ=૨ ફહ, અને કફ=૨ ફહ, એ સિદ્ધ કરી શકાય.

૨૫મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બે બાણુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી એક કર્ણને સમાંતર હોય છે, અને આ લીટીના છેડાઓને સામા શિરોબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટીઓથી તે કર્ણના ત્રણ સરખા ભાગ થાય છે.

૨. એક સીધી લીટીના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

૩. જો ત્રિકોણની બે મધ્યગા સરખી હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાણુ હોય છે; અને જો ત્રણે મધ્યગા સરખી હોય, તો તે ત્રિકોણ સમબાણુ હોય છે.

૪. ત્રિકોણની ત્રણે મધ્યગાનો સરવાળો પરિમિતિના ત્રણ ચતુર્થાંશ કરતાં વધારે હોય છે.



નવી ભૂમિતિ ભાગ ૧.

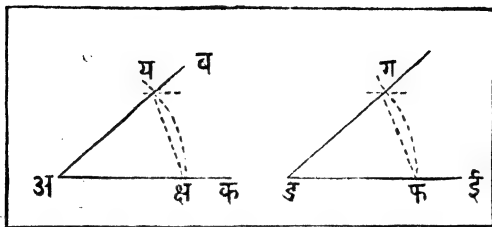


ખંડ ૩.

(કૃત્યો.)

કૃત્ય ૧.

આપેલી લીટીમાંના આપેલા બિંદુ આગળ આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો કરવો.



પક્ષ—ડઈ આપેલી લીટી છે. હ આપેલું બિંદુ છે.
વઅક આપેલો ખુણો છે.

સાધ્ય—આપેલા \angle વઅક જેવડો \angle ઈડગ કરવો.

રચના—અ મધ્યબિંદુ ધારીને ગમે તે ત્રિજ્યાએ એક ટ્રાંસ દોરો. તેને, અવ અને અકને અનુક્રમે ય અને ક્ષમાં છેદવા દો. હ મધ્યબિંદુ ધારીને પહેલાં જેટલીજ ત્રિજ્યાએ ટ્રાંસ દોરો. તે ડઈને અથવા ડઈના વધારેલા ભાગને ફમાં છેદે છે, એમ ધારો. ફ મધ્યબિંદુ લઈને ક્ષય (સીધી લીટીની) લંબાઈ જેટલી ત્રિજ્યાએ એક ટ્રાંસ દોરો. તેને ફ ટ્રાંસને ગમાં છેદવા દો. હગ સાંધો.

ફહગ માગેલો ખુણો થશે.

સિદ્ધતા—

(ફગ અને ક્ષય સાંધો.)

\therefore અક્ષય, હફગ ત્રિકોણોમાં—

અક્ષ=હફ; (સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

અય=હગ;

ક્ષય=ફગ;

\therefore આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

(પ્ર. ૧૪)

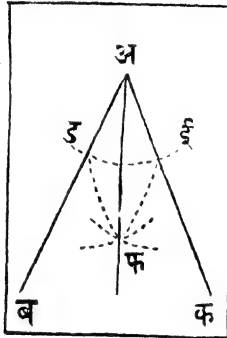
$\therefore \angle$ ફહગ એટલે ઈડગ= \angle ક્ષઅય.

૧લા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ત્રિકોણુ નેવડો ત્રિકોણુ દોરો.
૨. આપેલા ચતુષ્કોણુ, પંચકોણુ...નેવડી આકૃતિ દોરો.
૩. આપેલા કાટખુણુ ત્રિકોણુના બે સમઘિખાણુ ત્રિકોણુ કરો.

કૃત્ય ૨.

આપેલા ખુણાને દુભાગો.



પક્ષ—બઅક આપેલો ખુણો છે.

સાધ્ય—બઅક ખુણો દુભાગવો.

રચના—અ મધ્યબિંદુ લઈને ગમે તે ત્રિજ્યાએ, અબ અને અકને અનુક્રમે ડ અને ઈમાં છેદે એવો ટ્રાંસ દોરો. ડ અને ઈ મધ્યબિંદુઓ લઈને ડઈ નેટલી ત્રિજ્યાએ ફમાં એક ખીજાને છેદનારા બે ટ્રાંસો દોરો. અફ સાંધો.

અફ આપેલા ખુણાને દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—

(ડફ, ઈફ સાંધો.)

∴ અફઈ અને અફડ ત્રિકોણોમાં—

અઈ=અડ; (એકજ વર્તુળની ત્રિજ્યા.)

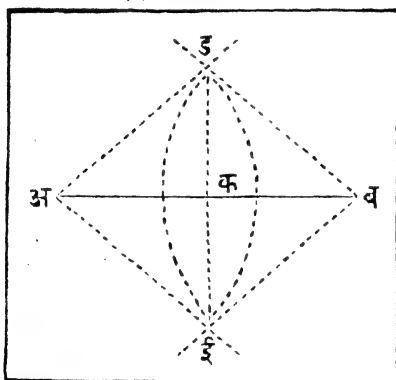
ફઈ=ફડ; (સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા.)

અફ બંનેમાં સાધારણ;
 $\therefore \triangle અઈફ \equiv \triangle અડફ.$ (પ્ર. ૧૪.)
 $\therefore \angle ડઅફ = \angle ઈઅફ.$

૨જા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ખુણાના ૪, ૮... સરખા ભાગ કરો.
૨. આપેલા ખુણાના બે ભાગ એવા કરો, કે એક બીજાથી ત્રણગણો થાય.
૩. અથવા ખુણાના અડધ, અથવા બે ભાગોમાં ડ અને ઈ બિંદુઓ એવાં લો, કે $\angle અડઈ = ૩ \angle અઈડ$ થાય.

કૃત્ય ૩.
આપેલી લીટીને દુભાગવી.



પ્રશ્ન—અથ આપેલી લીટી છે.

સાધ્ય—અથના બે સરખા ભાગ કરવા.

રચના—અથ મધ્યબિંદુઓ લઈને ઈઅથથી મોટી ત્રિજ્યાએ, ડ અને ઈમાં એક બીજાને છેદનારા બે કૈંસો દોરો. ડ, ઈ સાધો, અને સાધનારી લીટીને અથને કમાં છેદવા દો. અથ, ક બિંદુમાં દુભાગાશે.

સિદ્ધતા—

(અડ, બડ, અઈ, બઈ સાંધો.)

∴ અડઈ, બડઈ ત્રિકોણોમાં—

અડ=બડ; (સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા.)

અઈ=બઈ; ”

ડઈ બંનેમાં સાધારણ;

∴ \triangle અડઈ \equiv \triangle બડઈ. (પ્ર. ૧૪.)

∴ \angle અડક = \angle બડક.

હવે \triangle અડક, \triangle બડકમાં—

અડ=બડ;

ડક બંનેમાં સાધારણ;

\angle અડક = \angle બડક;

∴ \triangle અડક \equiv \triangle બડક. (પ્ર. ૧૦.)

∴ અક = કબ.

૩મી કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. ઉપલા કૃત્યની આકૃતિમાં અક, ડઈને કાટખુણે હુલાગે છે એમ બતાવી આપો.

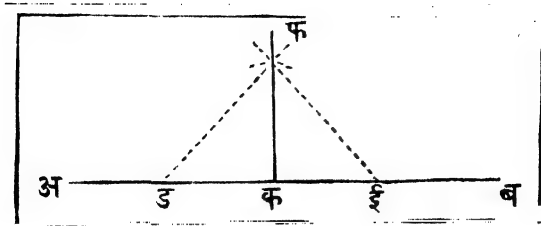
૨. આપેલી સીધી લીટીના ૪, ૮.....સરખા ભાગ કરો.

૩. આપેલી સીધી લીટીના એવા બે ભાગ કરો, કે (૧) એક બીજીથી ત્રણગણો થાય; (૨) એક બીજીથી સાતગણો થાય.

૪. આપેલા ત્રિકોણના પાયામાં એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો, કે તેનું સામા શિરોબિંદુથી અંતર બાકીની બે બાજુના સરવાળાના અર્ધ બરાબર હોય.

કૃત્ય ૪.

આપેલી લીટી પર તેમાં આપેલા બિંદુમાંથી લંબ દારો.



પક્ષ—અબ આપેલી લીટી છે. ક આપેલું બિંદુ છે.

સાધ્ય—કમાંથી અબ પર લંબ દોરવો.

પહેલી રીત.

રચના—આપેલી લીટીમાં કથી સરખે અંતરે અને તેની સામસામી બાજુએ ડ અને ઈ બિંદુ લો. ડ, ઈ મધ્યબિંદુઓ ધારીને કડથી ગમે તેટલી મોટી ત્રિજ્યાએ ફમાં છેદનારા કૈંસો દોરો. કફ સાંધો.

કફ, અબ પર લંબ થશે.

સિદ્ધતા—

(ફડ, ફઈ સાંધો.)

∴ \triangle ફકડ અને \triangle ફકઈમાં—

કડ=કઈ; (રચના.)

ફડ=ફઈ; (સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા.)

કફ બંનેમાં સાધારણ;

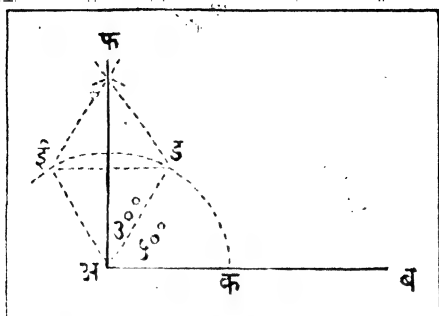
∴ \triangle ફકડ \equiv \triangle ફકઈ. (પ્ર. ૧૪.)

∴ \angle ફકડ= \angle ફકઈ.

∴ કફ, અબ પર લંબ છે.

બીજી રીત.

જે બિંદુમાંથી લંબ દોરવો છે તે બિંદુ અ છે એમ ધારો.



રચના—અને મધ્યબિંદુ ધારી ગમે તે ત્રિજ્યાએ કઢઈ કૉંસ દોરો, અને તેને અબને કમાં છેદવા દો. તેજ ત્રિજ્યાએ તે કૉંસના કઢ, ઢઈ ભાગ કાપી કાઢો. હ અને ઈ મધ્ય-બિંદુઓ લઈને પહેલાંના જેટલીજ ત્રિજ્યાએ એક બીજાને કમાં છેદનારા બે કૉંસ દોરો. અફ સાંધો.

સિદ્ધતા—

(અહ, અઈ સાંધો.)

\therefore અહ = ઢઈ = ઈઅ.

\therefore અઢઈ સમબાળુ ત્રિકોણ છે.

$\therefore \angle$ હઅઈ = 60° . (પ્ર. ૧૨, ઉ. સિ. ૨)

તેમજ \therefore અફ, \angle હઅઈને દુભાગે છે; (કૃ. ૩)

$\therefore \angle$ હઅફ = 30° .

પણ \triangle અકહ સમબાળુ છે;

$\therefore \angle$ કઅહ = 60° .

$\therefore \angle$ બઅફ = 60° .

૪થા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

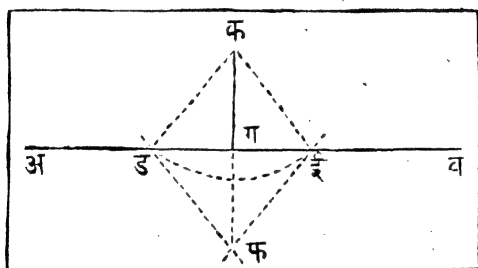
૧. આપેલા ચોરસ જેવડો ચોરસ દોરો.

૨. ૪૫ અંશનો ખુણો કોણમાપકની મદદ વગર કાઢો.

૩. ૨૨ $\frac{૧}{૨}$ અંશનો ખુણો કોણમાપકની મદદ લીધા વગર કાઢો.
 ૪. જેનો કર્ણ આપેલી સીધી લીટી બરાબર થાય, એવો ચોરસ દોરો.

કૃત્ય ૫.

આપેલી અમર્યાદ સીધી લીટી પર તેની બહાર આપેલા બિંદુમાંથી લંબ દોરવો.



પક્ષ—અથ આપેલી લીટી છે. ક આપેલું બિંદુ છે.

સાધ્ય—કમાંથી અથ પર લંબ દોરવો.

રચના—ક મધ્યબિંદુ અને જોઈતી ત્રિજ્યા લઈને અથને ડ અને ફમાં છેદનારો ટ્રાંસ દોરો. ડ, ફ મધ્યબિંદુઓ લઈને ડફ જેટલી ત્રિજ્યાએ, એક બીજને કમાં છેદે એવા બે ટ્રાંસ દોરો. કફ સાંધો. ધારો કે કફ, અથને ગમાં છેદે છે.

કગ, અથ પર લંબ થશે.

સિદ્ધતા—

(કડ, કફ, ફડ, ફફ સાંધો.)

∴ \triangle કડફ, \triangle કફફમાં

કડ = કફ;

ફડ = ફફ;

કફ બંનેમાં સાધારણ;

$\therefore \triangle કડફ \equiv \triangle ફઈફ.$ (પ્ર. ૧૪.)

$\therefore \angle ડકફ = \angle ફઈફ.$

હવે $\triangle ડકગ, \triangle ફઈકગ$ માં—

$\therefore કડ = ફઈ;$

કગ બંનેમાં સાધારણ;

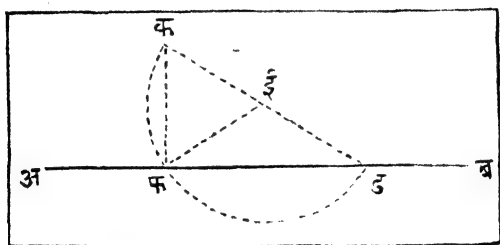
$\angle ડકગ = \angle ફઈકગ;$

$\therefore \triangle ડકગ \equiv \triangle ફઈકગ;$ (પ્ર. ૧૦.)

$\therefore \angle કગડ = \angle કગઈ.$

\therefore કગ, અથવા પર લંબ છે.

બીજી રીત.



રચના—અથવામાં (કની બરાબર નીચે ન હોય એવું) ગમે તે ડ બિંદુ લો. ક, ડ સાંધો.

કડને ફમાં દુભાગો.

ફ મધ્યબિંદુ અને ફઈ ત્રિજ્યા લઈને અથવાને ફમાં છેદનારો ડ્રોસ દોરો. કફ સાંધો.

કફ, અથવા પર લંબ થશે.

સિદ્ધતા—

(ફ, ફ સાંધો.)

$\therefore \triangle ફઈફ$ માં ફઈ=ફઈ.

$\therefore \angle કફઈ = \angle ફકઈ.$

(પ્ર. ૧૨)

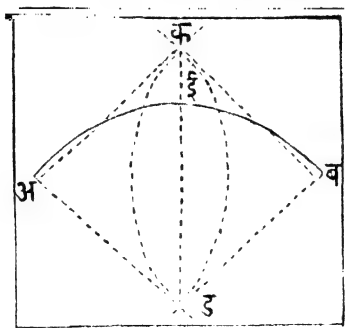
તેજ પ્રમાણે $\therefore \triangle$ ફફડમાં ફફ=ફડ,
 $\therefore \angle$ ફફડ = \angle ફડફ. (પ્ર. ૧૨)
 $\therefore \angle$ કફફ + \angle ફફડ = \angle ફકફ + \angle ફડફ.
 પણ \angle કફફ + \angle ફફડ = \angle કફડ;
 $\therefore \angle$ કફડ = \angle ફકફ + \angle ફડફ.
 $\therefore \angle$ કફડ = $\frac{1}{2}$ (\angle કફડ + \angle ફકફ + \angle ફડફ).
 પણ $\therefore \angle$ કફડ + \angle ફકફ + \angle ફડફ =
 ૨ કટખુણા; (પ્ર. ૮.)
 $\therefore \angle$ કફડ = ૧ કટખુણા.
 \therefore કફ, અથવા પર સંબંધ છે.

પ્રમા કૃત્ય પરનો પ્રશ્ન.

અથવા, ગમે તેવા ત્રિકોણ દોરો. દરેક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર સંબંધ દોરો. આ સંબંધો એકજ બિંદુમાં મળે છે એ જોઈ લો.

કૃત્ય ૬.

આપેલો કોંસ દુભાગવો.



પક્ષ—અથવા આપેલો કોંસ છે.

સાધ્ય—અવને દુભાગવો.

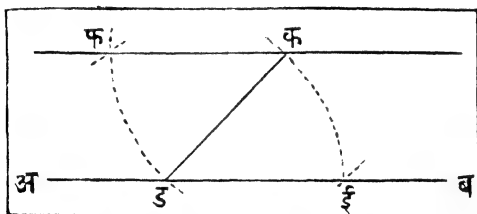
રચના—અ મધ્યખિંદુ અને અવના અર્ધથી જરા મોટી ત્રિજ્યા લઈને ફૅંસ દોરો. તેટલીજ ત્રિજ્યા અને જ મધ્યખિંદુ લઈને પહેલા ફૅંસને ક અને ડમાં છેદે એવો બીજો ફૅંસ દોરો. કડ સાંધો.

કડ, અવ ફૅંસને ફૅંમાં દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—(આ કૃત્યની સિદ્ધતા નવી ભૂમિતિના બીજા ભાગમાંના પ્રમેયના આધાર સિવાય સહેલી રીતે આપવી શક્ય નથી, માટે તે વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાની ખાસ જરૂર નથી.)

કૃત્ય ૭.

આપેલા ખિંદુમાંથી આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી દોરવી.



પક્ષ—અવ આપેલી લીટી છે. ક આપેલું ખિંદુ છે.

સાધ્ય—કમાંથી અવને સમાંતર લીટી દોરવી.

રચના—અવમાં એક ગમે તે ડ ખિંદુ લો. ડક સાંધો. કડબથી વિરુદ્ધ બાજુએ ડક સાથે કડબ જેવડો ખુણો કરનારી કફ લીટી દોરો.

સિદ્ધતા—

∴ કફ અને અવ લીટીઓને કડ લીટી મળે છે.

અને \angle ફકડ = \angle કડબ; (રચના.)

∴ કફ ∥ અવ. (પ્ર. ૪.)

ઉપલી રચનામાં \angle બડક જેવડો \angle ડકગ, ડકની તેજ બાજુએ (એટલે ડકની જે બાજુએ \angle બડક છે તેજ બાજુએ, એટલે જમણી બાજુએ) કર્યો હોય તો ચાલે કે ? કેમ નહિ ? તેજ બાજુ પર ખુણા કરીને સમાંતર લીટી દોરવી હોય, તો ખુણા કેવડો કરવો ? તેજ બાજુ પર \angle બડક જેવડો ખુણા કરીને સમાંતર લીટી કાઢવી હોય, તો હ બિંદુ ક્યાં લેવું ?

૭મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. પાસપાસેની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો એ આખ્યાં હોય, તો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કરો.

૨. જેની દરેક નાની બાજુ મોટી બાજુથી અર્ધો હોય, એવો એક લંબચોરસ આપેલી લીટી પર દોરો.

૩. જેનો એક ખુણો 60° હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ આપેલી લીટી પર કાઢો.

૪. જેનો એક ખુણો અને પરિમિતિ આખ્યાં હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

૫. જેની બે બાજુઓ અને કર્ણ અનુક્રમે ૫, ૨, ૪ સે. મી. હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કરો.

૬. જેની એક બાજુ ૨.૫" અને કર્ણ ૪" હોય એવો લંબચોરસ કાઢો.

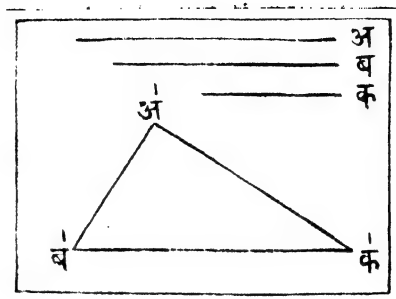
૭. આપેલી લીટીથી આપેલે અંતરે હોય એવી એક સમાંતર લીટી દોરો.

૮. બે પાસપાસેની બાજુઓ અને ગમે તે સામસામી બાજુઓની વચ્ચેનું અંતર એ આખ્યાં છે; તે પરથી તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

કૃત્ય ૮.

આપેલી ત્રણ લીટી એવી છે, કે તે પૈકી કોઈ પણ બે મળીને ત્રીજીથી વધારે છે; તો જે ત્રિકોણ-

ની બાજુઓ આ લીટીઓની બરાબર થાય એવો ત્રિકોણ દોરવો.



પક્ષ—અ, બ, ક, એવી ત્રણ આપેલી સીધી લીટીઓ છે, કે જે પૈકી કોઈ પણ બેનો સરવાળો ત્રીજીથી વધારે છે.

સાધ્ય—અ, બ, ક, જેટલી જેની બાજુઓ હોય, એવો ત્રિકોણ દોરવો.

રચના—અ જેટલી $\overline{બક}$ લીટી દોરો. $\overline{બ}$ અને $\overline{ક}$ મધ્ય-બિંદુઓ ધારીને અનુક્રમે $\overline{ક}$ અને $\overline{બ}$ જેટલી ત્રિજ્યાએ બે ટ્રાંસો દોરો. તેમને એક બીજાને $\overline{અ}$ માં છેદવા દો, $\overline{અ}$ $\overline{બ}$, $\overline{અ}$ $\overline{ક}$ સાંધો.

$\overline{અબક}$ માંગેલો ત્રિકોણ છે.

સિદ્ધતા— $\overline{બક} = \overline{અ}$.

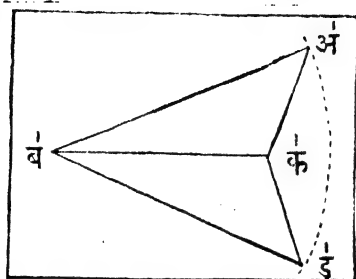
$\overline{કઅ} = \overline{બ}$.

$\overline{બઅ} = \overline{ક}$.

$\therefore \overline{અબક}$ ત્રિકોણની બાજુઓ આપેલી લીટીઓની બરાબર છે.

.....
ધારો કે આપણે એકજ પાયા પર બની શકે તેટલા એવા

ત્રિકોણો દોરવા છે, કે જેમની બાજુઓ આપેલી લીટીઓની અરાબર હોય; તો આપણે તે કેમ દોરીશું ?



ધારો કે અ, બ, ક, આપેલી લીટીઓ છે, અને તે પૈકી અ પાયો છે.

અ જેટલી બ'ક' લીટી દોરો. ધારો કે ક'માંથી બ જેટલી લાંબી લીટીઓ નીકળે તેટલી દોરવી છે, તો તે કેટલી દોરી શકાશે ? એવી લીટીઓના બીજા છેડા બતાવનારી લીટી (ક'થી બ અંતરે હોય એવાં સર્વ બિંદુઓના માર્ગ) આપણે શી રીતે દોરી શકીએ ? “ક' મધ્યબિંદુ અને બ જેટલી ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો.” આ વર્તુળની સર્વ ત્રિજ્યાઓ બ જેટલી લાંબી છે. આ ત્રિજ્યાઓ સિવાય ક'માંથી દોરેલી બાકીની સર્વ લીટીઓ બથી ઓછી કે વધારે થશે. હવે, બ'માંથી ક જેટલી લાંબી લીટીઓ નીકળે તેટલી દોરવી હોય, તો તે લીટીઓ કઈ થશે ? “બ' મધ્ય-બિંદુ અને ક' ત્રિજ્યા લઈને દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ.” આ વર્તુળો એક બીજાને ક્યાં છેદે છે ? “અ' અને ડ' બિંદુઓમાં.” આ બિંદુઓમાંથી બ' અને ક' સુધી દોરેલી લીટીઓની લંબાઈ કેટલી છે ? “આ બિંદુઓ સિવાય તમે બીજું

એવું કોઈ બિંદુ કાઢી શકશે, કે જેમાંથી **બ, ક** સુધી દોરેલી લીટીઓ અનુક્રમે **ક** અને **ચ** લંબાઈની થાય ? “ના.”

અ, ચ, ક જેટલી જેની બાજુઓ અનુક્રમે છે, એવો ક્રુક્ત એકજ ત્રિકોણ જ્યારે **બ, ક**ની ઉપલી બાજુએ થઈ શકે છે; ત્યારે તેવડીજ બાજુઓનો **બ, ક**નું ત્રિકોણ **બ, ક** પાયા પર, **ક** છેડો ઉપલી બાજુએ રાખીનેજ મૂક્યો હોય, તો **ક** બિંદુ ક્યાં પડશે ? “**અ** પર.” શા માટે ? “તે બીજી બાજુએ પડે તો ઉપલા નિયમને બાધ આવે.”

આ ઉપરથી સિદ્ધ થાય છે, કે જેની બાજુઓ અનુક્રમે **અ, ચ, ક**ની બરાબર હોય એવો કોઈ પણ ત્રિકોણ **બ, ક** પર મૂક્યો હોય, તો તેનું ત્રીજું શિરોબિંદુ **અ** પર પડવું જોઈએ; માટે જેમની બાજુઓ અનુક્રમે સરખી છે, એવા ત્રિકોણોના સંબંધમાં શો નિયમ નીકળે છે ? “તે એકરૂપ હોય છે.”

૮મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ત્રિકોણ બરાબર એક ત્રિકોણ દોરો.
૨. જેની સરખી બાજુઓમાંની એક બાજુ આપેલી હોય, એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ આપેલા પાયા પર દોરો.
૩. આપેલી લીટી પર એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ દોરો કે જેની દરેક સરખી બાજુ પાયાથી બમણી હોય.
૪. જેનો પાયો અને પરિમિતિ આપ્યાં હોય એવો સમ-દ્વિબાજુ ત્રિકોણ દોરો.
૫. આપેલા પાયા પર એક સમબાજુ ત્રિકોણ દોરો.
૬. * કાટખુણાના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.
૭. જેની દરેક બાજુ એક કર્ણની બરાબર હોય, એવો સમબાજુ ચતુષ્કોણ કાઢો.
૮. આપેલા પાયા પર નિયમિત પદ્મકોણ કાઢો.

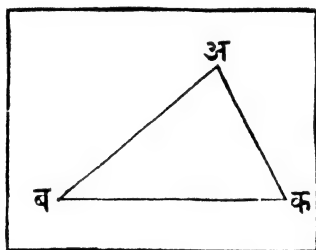
૯. એક ત્રિકોણની (પાયા સિવાયની) બે બાજુઓ અને ઉંચાઈ (સામા શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલો લંબ) આપેલી છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૧૦. એક ત્રિકોણનો પાચો, એક બાજુ, અને સામા શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલી મધ્યગા એટલું આપેલું છે; તે પરથી ત્રિકોણ કાઢો.

૧૧. એક ત્રિકોણનો પાચો, ઉંચાઈ અને એક બાજુ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

૧૨. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બે કોણો અને એક બાજુ આપેલાં છે; તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

સૂચના—



ત્રિકોણના ખુણા અને બાજુઓ દર્શાવવા માટે નીચેનો સંકેત નક્કી થયેલો છે. અલગ ત્રિકોણમાં—

∠અ એટલે બઅક ખુણો,

∠વ એટલે અલક ખુણો,

∠ક એટલે લકઅ ખુણો;

તેમજ,

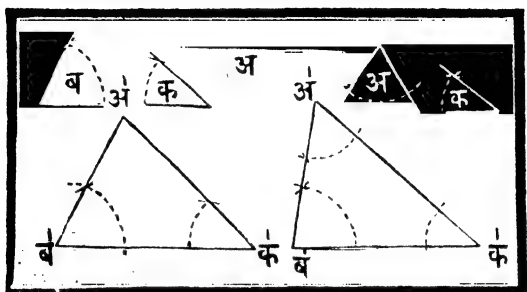
અ બાજુ એટલે ∠અની સામેની (=લક) બાજુ;

વ બાજુ એટલે ∠વની સામેની (=અલ) બાજુ;

ક બાજુ એટલે ∠કની સામેની (=અલ) બાજુ.

કૃત્ય ૯.

એક બાજુ અને બે ખુણા આપેલા હોય, તે પરથી ત્રિકોણ દોરવો.



એક ત્રિકોણને ત્રણ ખુણા હોય છે. તે પૈકી કોઈ પણ બે ખુણા એક બાજુને અડકેલા હોય છે, અને ત્રીજો ખુણો તે બાજુની સામે હોય છે.

એક ત્રિકોણમાંની એક બાજુ આપીને બે ખુણા આપવા, એટલે (૧) તે બાજુને અડકીને રહેલા બંને ખુણા આપવા; અથવા (૨) તે બાજુની સામેનો એક ખુણો અને તે બાજુને અડકી રહેલો એક ખુણો આપવો. એ સિવાય ત્રીજા પ્રકારનો સંભવ નથી.

૧ લો પ્રકાર—અ આપેલી બાજુ છે. $\angle B$ અને $\angle C$ આ બાજુને અડકીને રહેલા બે ખુણા છે.

૨ જો પ્રકાર—અ આપેલી બાજુ. $\angle A = A'$ બાજુની સામેનો ખુણો, અને $\angle C = C'$ બાજુને અડકીને રહેલો ખુણો.

(૧) રચના—અ લંબાઈની એક લીટી દોરો. B છેડા આગળ B'C' એ $\angle B$ જેવો ખુણો કરો. C છેડા આગળ C'C' એ $\angle C$ જેવો ખુણો કરો.

અંતર્ગત આ માગેલો ત્રિકોણ છે.

(૨) રચના— \angle અ અને \angle કનો સરવાળો કરીને તે બે કાટખુણામાંથી બાદ કરો. બાદબાકી આવે તે ત્રિકોણનો બાકી રહેલો ત્રીજો ખુણો છે, એટલે કે અને અડકીને રહેલા ખુણા પૈકી બીજો (બ) ખુણો છે. આ ખુણો બંધ પછી પહેલા પ્રકારમાં કલા પ્રમાણે કૃતિ કરીને ત્રિકોણ દોરો.

સિદ્ધતા— \therefore \angle અ = \angle ક;

$$\angle$$
 ક \angle અ = \angle બ;

$$\angle$$
 અ \angle ક = \angle ક;

$\therefore \triangle$ અબકની એક બાજુ અને બે ખુણા, આપેલી બાજુ અને બે ખુણા બરાબર અનુક્રમે છે.

અ બાજુ દોર્યા પછી અની અમુક બાજુએ \angle બ દોરવો જોઈએ, અને અમુક બાજુએ \angle ક કાઢવો જોઈએ, એમ નથી. આ ખુણા ગમે તેમ દોર્યા હોય તોપણ તૈયાર થનારા ખુણા સરખાજ બને છે. આ વાત ત્રિકોણ એક પર એક મૂક્યા હોય તો ધ્યાનમાં આવશે. આ પરથી એ પણ સ્પષ્ટ થાય છે, કે બે ત્રિકોણના બંધને ખુણા અને એકેક બાજુ સરખી હોય તો ત્રિકોણ એકરૂપજ હોય છે.

૯મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણુ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક સાંકડો ખુણો આપેલા છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૨. એક કાટખુણુ ત્રિકોણની કાટખુણો કરનારી એક બાજુ અને તેની સામેનો ખુણો આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૩. એક કાટખુણુ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખુણો બીજાથી બમણો છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૪. સમદ્વિબાજુ કાટખુણુ ત્રિકોણનો કર્ણ આપેલો છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

૫. એક ત્રિકોણની ઉંચાઈ અને પાયા પાસેના બંને ખુણા આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૬. એક સમબાજુ ત્રિકોણની ઉંચાઈ આપેલી છે, તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

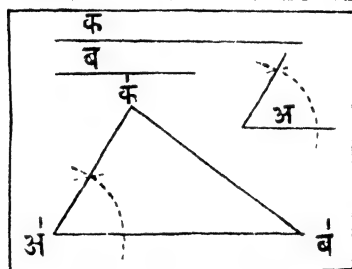
૭. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની ઉંચાઈ અને પાયાની સામેનો ખુણો એ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

૮. જેનો પાયાની સામેનો ખુણો પાયા પાસેના દરેક ખુણાથી ૪ ગણો હોય એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાઢો.

૯. જેનો પાયો ૨.૪" હોય એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાઢો.

કૃત્ય ૧૦.

ત્રિકોણની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો એ આપેલાં હોય, તે પરથી તે ત્રિકોણ દોરવો.



પદ્ધતિ—બ અને ક એ આપેલી બાજુઓ છે. અ આપેલો ખુણો છે.

રચના—આપેલા \angle અ જેવડો બંધક ખુણો કાઢો. બંધક ખુણાની અંબ અને અંક એ બાજુઓ આપેલી ક અને બ બાજુની બરાબર કરો.

અંબક આ માટે ત્રિકોણ છે.

સિદ્ધતા—(સ્પષ્ટ છે.)

૧૦મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો અને ઉંચાઈ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

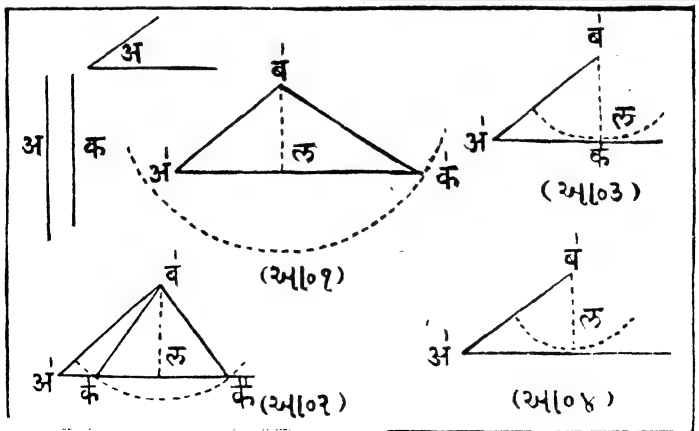
૨. જેનો એક ખુણો 60° હોય અને તેમાં થઈને જતો કર્ણ ૪" લાંબો હોય, એવો સમબાજુ ચતુષ્કોણ કાઢો. તેની બાજુ કેટલી લાંબી છે?

૩. જેની મધ્યગા ૧.૨" હોય એવો સમબાજુ ત્રિકોણ દોરો.

સૂચના—(કેળવણીખાતાએ નક્કી કરેલા ભૂમિતિના અભ્યાસક્રમમાં નીચેનું (૧૧મું) કૃત્ય આવતું નથી; માટે તે વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાની જરૂર નથી. આપેલા પક્ષ પરથી ત્રિકોણ બનાવવાના જે મુખ્ય પ્રકાર છે, તે બધાનો સમાવેશ થાય એટલા માટેજ ફક્ત આ કૃત્ય અહીં આપ્યું છે.)

કૃત્ય ૧૧.

ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તે પૈકી એકની સામેનો ખુણો એ આપ્યાં હોય, તે પરથી ત્રિકોણ કાઢવો.



પક્ષ—અ અને ક આપેલી બાબતો છે, અને \angle અ આપેલો ખુણો છે.

રચના— \angle અ જેવડો **બંક** ખુણો કરો. ક જેટલી લાંબી **અં** બાબત રાખો. **બં** મધ્યબિંદુ ધારીને અ ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો.

(ધારો કે **લ** = **બં**માંથી **અં**ક પર દોરેલો લંબ છે.)

અં અને **લ** સાથે સરખાવતાં અ (**=બંક**) ની લંબાઈ ઓછી વત્તી હોય તે પ્રમાણે નીચેના ચાર પ્રકાર થશે.

(૧) ક (**= અં**) કરતાં અ (**=બંક**) વધારે લાંબી હોય, તો **અં** બિંદુ **કં** પરિધની અંદર રહે છે, અને **અં**ક એવો એકજ ત્રિકોણ બને છે. (આકૃતિ ૧ જુઓ.)

(૨) **બંક**, **અં** કરતાં નાની, પણ **લ** કરતાં મોટી હોય, તો **અં** છેડો પરિધની બહાર રહેશે, અને પરિધ **અં**ક લીટીને **કં** અને **કં** એ બે ઠેકાણે છેદશે.

એવી રીતે **અં**ક અને **અં**ક એવા બે માગ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણ બનશે. (આકૃતિ ૨ જુઓ.)

[એવે પ્રસંગે બે જવાબ આવે છે, તેથી આ મંદિગ્ધ પ્રકારનો દાખલો છે.]

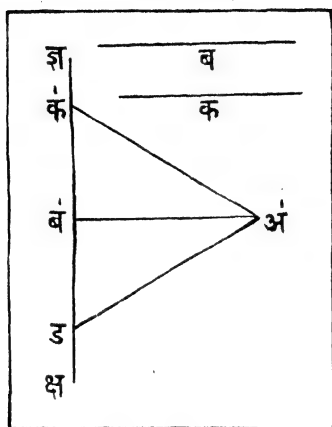
(૩) જો **બંક**, **લ** બરાબર હોય, તો વર્તુળ **અં**ક લીટીને ફક્ત એકજ ઠેકાણે સ્પર્શ કરશે. એવી સ્થિતિ હોય ત્યારે (ત્રીજી આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે) ફક્ત એકજ માગ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણ થશે.

(૪) જો **બંક**, **લ**થી નાની હોય, તો વર્તુળ **અં**ક લીટીને બીજાકુલ સ્પર્શ કરશે નહિ. એવી સ્થિતિમાં ત્રિકોણ બીજાકુલ બની શકશે નહિ. (આકૃતિ ૪ જુઓ.)

સિદ્ધતા—(સ્પષ્ટ છે.)

કૃત્ય ૧૨.

કાટખુણુ ત્રિકોણુનો કર્ણ અને એક બાજુ આપ્યાં હોય, તે પરથી ત્રિકોણુ કાઢવો.



પક્ષ—વ કર્ણ છે, ક બાજુ છે.

રચના—ક જેટલી એક વંઅ લીટી દોરો. આ લીટીની સાથે કાટખુણો કરનારી ક્ષવંજ અમર્યાદ લીટી દોરો. અં મધ્યબિંદુ અને વ ત્રિજ્યા લઈને ક્ષવંજ લીટીને કે અને ડમાં છેદે એવો કૉંસ દોરો. અંક અને અંડ સાધો.

અંવક અને અંવડ માઝ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણુ છે.

સિદ્ધતા—(સ્પષ્ટ છે.)

૧૨મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણુ ત્રિકોણુની કાટખુણો કરનારી એક બાજુ અને કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર દોરેલો લંબ એ આપેલાં છે; તે પરથી તે ત્રિકોણુ દોરો.

૨. એક કાટખુણુ ત્રિકોણનો કર્ણ, અને ખીજ બે બાજુ-
ઓનો સરવાળો, એ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૮૫ી ૧૨ સુધીનાં કૃત્યો પરના

પરચુરણ પ્રશ્ન.

૧. નીચે આપેલા પક્ષ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવો:—

(૧) $\angle B = 30^\circ$, $b = 2''$, $c = 4''$;

(૨) $\angle B = 134^\circ$, $c = 3''$, $b = 9''$;

(૩) $\angle B = 84^\circ$, $c = 3''$, $b = 9''$;

(૪) $a = 4''$, $\angle B = 29^\circ$, $\angle C = 64^\circ$;

(૫) $a = 4''$, $\angle A = 29^\circ$, $\angle C = 14^\circ$;

(૬) $b = 3''$, $\angle C = 44^\circ$, $\angle B = 44^\circ$.

૨. એક સમઘ્રિબાજુ ત્રિકોણની પરિમિતિ અને ઉંચાઈ
આપેલી છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૩. એક સમઘ્રિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો અને તેની સામેનો
ખુણો આપેલા છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૪. એક સમઘ્રિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો, અને પાયાની
સામેના ખુણાનો તથા પાયાની પાસેના એક ખુણાનો સરવાળો
આપેલા છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

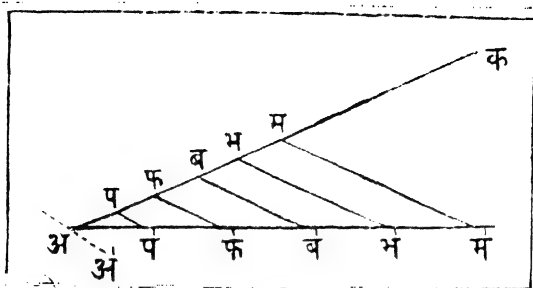
૫. એક સમઘ્રિબાજુ ત્રિકોણની ઉંચાઈનો અને એક
બાજુનો સરવાળો તથા પાયો એ બે આપેલાં છે; તો તે
ત્રિકોણ દોરો.

૬. એક સમઘ્રિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની દિશા અને ત્રણ
બાજુ પૈકી દરેક બાજુમાંના એક બિંદુનું સ્થાન એ આપેલાં
છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૭. ત્રિકોણનો પાયો, ઉંચાઈ, અને તેની આસપાસ દોરેલા
વર્તુળની ત્રિજ્યા એ ત્રણ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

કૃત્ય ૧૩.

આપેલી લીટીના અમુક સરખા ભાગ કરવા.



પક્ષ—અમ આપેલી લીટી છે.

સાધ્ય—તેના અમુક (પાંચ) ભાગ કરવા છે.

રચના—અમની સાથે સાંકડો ખુણો કરનારી ગમે તે અક અમર્યાદ લીટી દોરો. કંપાસ લઈને તેના બે છેડા એક બીજાથી જરા આધા રાખીને અથી શરૂ કરીને અક લીટીના અપ, પફ, ફવ, વભ, ભમ એવા પાંચ સરખા ભાગ એક પછી એક લો. મમ સાંધો. મ,વ,ફ,પ બિંદુઓમાંથી મમને સમાંતર અને અમને છેદનારી મમ, વવ, ફફ, પપ લીટીઓ દોરો.

અપ, પફ, ફવ, વભ, ભમ આ માગેલા ભાગ છે.

અમાં થઈને પપને સમાંતર અઅ દોરો.

સિદ્ધતા—∴ અઅ, પપ, ફફ, વવ, ભભ, મમ આ સમાંતર છે, અને તેમને છેદનારી અક લીટીના અપ, પફ.....આ ગાળાઓ સરખા છે;

∴ અમ લીટીના અપ, પફ.....આ ગાળાઓ પણ સરખા છે. (પ્ર. ૨૪)

૧૩મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલી લીટીના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

૨. આપેલી લીટીનો $\frac{૩}{૪}$ ભાગ કાપી કાઢો.

૩. આપેલી લીટીનો $\frac{૨}{૫}$ ભાગ કાપી કાઢો.

૪. આપેલી અબ લીટીના ક બિંદુમાં એવા બે ભાગ કરો, કે $\frac{અક}{કબ} = \frac{૩}{૫}$

૫. તેરમા કૃત્યની આકૃતિમાં $\frac{ફફ}{વવ} = ૨$, અને $\frac{મમ}{વવ} = ૪$ છે એમ સિદ્ધ કરો.

પરિશિષ્ટ અ.

પરચુરણ પ્રશ્ન.

૧. ચતુષ્કોણના અ, બ, ક, ડ અનુક્રમે ચાર ખુણા છે. હવે જો અ અને બ મળીને ક અને ડના સરવાળાની બરાબર હોય, તો આ ચતુષ્કોણની બે બાજુઓ એક બીજીને સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૨. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાની પાસેના બહારના ખુણાને દુભાગનારી લીટી પાયાને સમાંતર હોય છે.

૩. અબકડઈ એક નિયમિત પંચકોણ છે. તેમાં અક, અડ સાંધો. બક, ઈડને લંબાવીને ફમાં મળવા દો. ફકડ અને અકડ ત્રિકોણો એકરૂપ છે એમ બતાવી આપો.

૪. * ત્રિકોણના બહારના ખુણાને દુભાગનારી લીટી જો તેની એક બાજુને સમાંતર હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૫. ત્રિકોણના બે અંદરના ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજીને કદી પણ કાટખુણે છેદતી નથી.

૬. અબ, કડ સમાંતર લીટીઓ છે, અને તેમની વચ્ચે પ એક બિંદુ છે; તો $\angle વપડ = \angle અબપ + \angle કડપ$ એમ બતાવી આપો.

૭. * સમદ્વિબાજી ત્રિકોણના પાયાના બે છેડામાંથી સામી બાજુઓ પર લંબ દોરેલા છે; તો તે લંબ પાયાની સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમાંના દરેક ખુણો પાયાની સામેના ખુણાથી અર્ધો છે એ સિદ્ધ કરો.

૮. અબક ત્રિકોણના અ ખુણાને દુભાગનારી લીટી વકને ડમાં મળે છે, અને વકને ઈ સુધી વધારેલી છે; તો \angle અબક + \angle અકઈ = ૨ \angle અડક એ સિદ્ધ કરો.

૯. ત્રિકોણની અબ, અક બાજુઓ અનુક્રમે ડ અને ઈમાં દુભાગેલી છે; અને વઈ, કડ અનુક્રમે ફ અને ગ સુધી એવી રીતે વધારેલી છે કે ઈફ = વઈ, અને ડગ = કડ થાય છે; તો ફઅગ એક સીધી લીટી છે એ બતાવી આપો.

૧૦. * સમદ્વિબાજી ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો, પાંચો વધારવાથી થતા બહારના ખુણાની બરાબર હોય છે.

૧૧. અબક ત્રિકોણના વ અને ક ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ ડમાં મળે છે; તો \angle વડક = $૯૦^\circ + \frac{1}{2}$ અ છે એમ બતાવી આપો.

૧૨. વકની એકજ બાજુએ અબક એક સમબાજી અને ડવક એક સમદ્વિબાજી એવા બે ત્રિકોણ દોરેલા છે, અને \angle વડક = $\frac{1}{2}$ \angle વઅક છે; તો અડ = વક છે એમ બતાવી આપો.

૧૩. અબક ત્રિકોણની વક, કઅ, અબ બાજુઓમાં ક્ષ, ય, જ ખિંડુઓ એવાં લીધાં છે, કે \angle વઅક્ષ = \angle કવચ = \angle અકજ; તો બતાવી આપો કે અક્ષ, વચ, કજ આ એક ખિંડુમાં થઈને ન જતી હોય, તો તેમનાથી જે ત્રિકોણ થાય છે તે અને અબક ત્રિકોણ એ બેના ખુણાઓ અનુક્રમે સરખા છે.

૧૪. અવકહ કાટખુણુ ચતુષ્કોણુની એક નાની (અબ) બાજુમાં એક વ બિંદુ છે; તો એવો એક સમબાજુ ચતુષ્કોણુ કાઢો, કે તેનું એક શિરોબિંદુ વ થાય, અને બાકી રહેલાં શિરો-
બિંદુઓ કાટખુણુ ચતુષ્કોણુની બાકીની બાજુઓ ઉપર પડે.

૧૫. અવક ત્રિકોણની બક બાજુ હ સુધી વધારી છે. કઈ, \angle અકબને દુભાગે છે અને અબને ર્ઈમાં મળે છે. ર્ઈમાં થઈને બકને સમાંતર લીટી દોરી, તે અકને ફમાં અને અકહને દુભાગનારી લીટીને ગમાં મળે છે; તો ર્ઈફ= ફગ છે એમ બતાવી આપો.

૧૬. અવક સમબાજુ ત્રિકોણની અબ, બક, કઅ બાજુઓ-
માં અનુક્રમે પ, દ, ર બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે અપ=
બદ=કર છે; તો \triangle પદર સમબાજુ છે એમ બતાવી આપો.

૧૭. એક વર્તુળના અઅ, બબ, કક વ્યાસ છે; તો \triangle
અવક $\equiv \triangle$ અર્વક છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૮. અવક ત્રિકોણની અબ, બક બાજુઓ પર ત્રિકોણ-
ની બહાર અબફગ, બકઈડ ચોરસ દોરેલા છે; તો \triangle
અબહ $\equiv \triangle$ ફબક એમ બતાવી આપો.

૧૯. અવક ત્રિકોણની ત્રણે બાજુ પર ત્રિકોણની બહાર
બકહ, કઅઈ, અબફ એ સમબાજુ ત્રિકોણો કાઢેલા છે;
તો અહ=બઈ=કફ એમ બતાવી આપો.

૨૦. ક્ષયમાંના મ બિંદુથી ક્ષયની બંને બાજુએ મપ,
મદ આ સરખી લીટીઓ એવી રીતે દોરેલી છે, કે \angle યમપ
 $\equiv \angle$ યમદ છે; તો \triangle પક્ષય $\equiv \triangle$ વક્ષય છે એમ
બતાવી આપો.

૨૧. અવકહ ચોરસ છે. તેની એકેક બાજુમાંથી અઈ,
બફ, કગ, હહ આ સરખા કકડા કાપી કાઢેલા છે; તો
ર્ઈ, ફ, ગ, હ આ એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે એમ સિદ્ધ કરો.

૨૨. અવક ત્રિકોણની અવ, અક બાજુઓ સરખી છે. અવક ત્રિકોણની બહાર અવ, અક પર અડબ, અર્ધક સમબાજુ ત્રિકોણો દોરેલા છે. વર્ડ, કડ એક બીજીને મમાં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે મડ = મર્ડ.

૨૩. અવકડર્ડ એક નિયમિત પંચકોણ છે. અ, બ ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તો મક, મડ, મર્ડ અનુક્રમે ક, ડ, ર્ડ ખુણાને દુભાગે છે, અને મ બિંદુ પંચકોણનાં સર્વ શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે છે, એમ બતાવી આપો.

૨૪. અવક સમબાજુ ત્રિકોણ છે. વકને વધારીને તેમાં દ બિંદુ લીધું છે; તો તે વ કરતાં અની વધારે પાસે છે એમ બતાવો.

૨૫. ક્ષયજ્ઞ કાટખુણુ ત્રિકોણમાં ક્ષય = ક્ષજ્ઞ છે. \angle યને દુભાગનારી ચરલીટી ક્ષજ્ઞને રમાં મળે છે. હવે જો ચજ્ઞ પર રન લંબ દોર્યો હોય, તો રન = ક્ષર છે એમ બતાવો.

૨૬. અવક લીટીમાંના વ બિંદુમાંથી વડ, વર્ડ બે સરખી લીટીઓ એવી દોરી છે, કે ડવર્ડ કાટખુણો થયો છે. અક પર ડફ, ર્ડહ લંબો દોરેલા છે; તો ડફ = વહ છે એમ બતાવો.

૨૭. બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણોના પાયાની સામેના ખુણા સરખા છે, અને પાયાની સામેના ખુણામાંથી પાયા પર દોરેલા લંબો સરખા છે; તો તે ત્રિકોણો એકરૂપ છે એમ બતાવો.

૨૮. અવક ત્રિકોણની અવ અને અક બાજુઓ બરાબર છે. અવમાં ડ બિંદુ લો. ક અને ર્ડ સુધી વધારો, અને અર્ડને અડ બરાબર કરો. હવે ર્ડને વધારી હોય તો તે વકને કાટખુણુ છેદે છે એમ બતાવી આપો.

૨૯. જેનું મધ્યબિંદુ મ છે એવા એક વર્તુળની અવ બ્યા ક સુધી વધારી છે; અને વક, અમની બરાબર કરી છે.

કમ લીટી વર્તુળને ડમાં છેદે છે, અને વધારવાથી ફરી તેને
ઈમાં છેદે છે; તો \angle અમઈ, \angle વમડથી ત્રણગણો છે એમ
બતાવી આપો.

૩૦. એક વર્તુળના અબ અને કડ ગમે તે બે વ્યાસ
છે. બ બિંદુમાંથી એક લીટી કડને સમાંતર દોરી છે. આ
લીટી અબની સાથે જે ખુણા કરે છે, તે કબ, ડબ લીટી-
ઓથી દુભાગાય છે એમ બતાવી આપો.

૩૧. * અબક ત્રિકોણના બ અને ક એ સરખા ખુણા-
ઓને દુભાગનારી લીટીઓ સામી બાજુઓને અનુક્રમે ઈ
અને ફમાં મળે છે; તો ઈફ, બકને સમાંતર છે એમ
બતાવી આપો.

૩૨. અબકડ ચતુષ્કોણમાં અબ=કડ, અને \angle બ=
 \angle ક; તો બકને અડ સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૩૩. ઉપલા પ્રશ્નમાંના અબકડ ચતુષ્કોણના કર્ણ સરખા
છે એ બતાવી આપો.

૩૪. અબકડ ચતુષ્કોણમાં \angle અ = \angle બ, અને \angle ક=
 \angle ડ; તો અડ = બક છે એ બતાવો.

૩૫. * અબક ત્રિકોણમાં અબ=અક. બક પર દોરેલો
લંબ અબ અને અક બાજુ પૈકી ગમે તે એક બાજુને
ડમાં અને બીજી બાજુના વધારેલા ભાગને ઈમાં છેદે છે; તો
 \triangle અડઈ સમઘિબાજુ છે એમ બતાવી આપો.

૩૬. પદ્મ સમઘિબાજુ ત્રિકોણની પદ્મ, પર સરખી
બાજુઓમાં પથી સરખે અંતરે ક્ષ અને ચ બિંદુઓ લીધાં છે.
દચ, રક્ષ એક બીજીને જમાં છેદે છે; તો જદર, જક્ષય
સમઘિબાજુ ત્રિકોણો છે એ સિદ્ધ કરો.

૩૭. અબક ત્રિકોણની બક બાજુમાં (જરૂર લાગે તો
વધારીને) ડ બિંદુ એવું લીધું છે, કે બઅડ અને અબડ
ખુણા સરખા થયા છે. અડબ ખુણાને દુભાગનારી લીટી

અકને (અથવા તેના વધારેલા ભાગને) ર્માં મળે છે; તે
 \angle અર્ફ= \angle બર્ફ છે એમ બતાવો.

૩૮. અબક સમબાણુ ત્રિકોણના બ અને ક ખુણા અનુક્રમે બડ અને કડથી દુભાગાયા છે. અબને સમાંતર ર્ફ દોરેલી છે, અને તે બકને ર્માં મળે છે. અકને સમાંતર ડફ દોરેલી છે, અને તે બકને ફમાં મળે છે; તે બર્ફ, ર્ફ, ફક સરખી છે એમ બતાવો.

૩૯. અબક સમદ્વિબાણુ કાટખુણુ ત્રિકોણ છે. તેનો અબ કર્ણ છે. અડ એ \angle બઅકને દુભાગનારી અને બકને ડમાં મળનારી લીટી છે; તે અક+કડ=અબ એ બતાવી આપો.

૪૦. * કાટખુણુ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખુણો ખીજ સાંકડા ખુણાથી બમણો હોય, તો કર્ણ ખીજ બેમાંની નાની બાણુથી બમણો હોય છે.

૪૧. એક ચતુષ્કોણની ચારે બાણુઓ અનુક્રમે ખીજ ચતુષ્કોણની ચારે બાણુની બરાબર હોય, અને એકનો એક ખુણો ખીજના તેને મળતા આવતા ખુણાની બરાબર હોય, તો તે ચતુષ્કોણો એકરૂપ હોય છે.

૪૨. બક પાયાની બંને બાણુએ અબક અને ડબક એકરૂપ ત્રિકોણો છે, અને તેમની એક ખીજને મળતી આવતી બાણુઓ પાયાના એકજ છેડામાં મળે છે; તો બક, અડને કાટખુણુ દુભાગે છે એમ સિદ્ધ કરો.

૪૩. અબક અને ડબક એ બે ત્રિકોણો બક પાયાની એકજ બાણુએ છે. બે અબ=ડક અને અક=ડબ હોય, તો અડ, બકને સમાંતર છે એમ બતાવો.

૪૪. * કાટખુણુ ચતુષ્કોણમાં પાસપાસેની બાણુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાધનારી લીટીઓથી થતી આકૃતિ સમબાણુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૪૫. અવક ત્રિકોણમાં અવ=અક છે. અવમાં ગમે ત્યાં
ઈ બિંદુ લઈને તેને વકના મધ્યબિંદુ ડની સાથે સાંધ્યું છે;
તો અક અને અઈની બાદબાકી ડઈ અને ડવની બાદબાકી
કરતાં મોટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૪૬. અવકડઈફ ૫૨કોણ છે; તો તેની પરિમિતિ અકઈ
ત્રિકોણની પરિમિતિથી વધારે છે એમ બતાવો.

૪૭. ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુ કરતાં લાંબી લીટી
ત્રિકોણની અંદર કોઈ પણ ઠેકાણે દોરી શકાશે નહિ એમ બતાવો.

૪૮. અવક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં ડ એક બિંદુ છે; તો
ડઅ, ડવ, ડક લીટીઓથી ત્રિકોણ બની શકશે એમ બતાવો.

૪૯. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક કર્ણ દરેક બાજુથી
હંમેશ મોટો હોય છે, (પણ દરેક ચતુષ્કોણના સંબંધમાં એ
સત્ય લાગુ પડતું નથી).

૫૦. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાંની સરખી બાજુઓ પૈકી દરેક
બાજુ ત્રીજી બાજુથી મોટી હોય, તો સરખી બાજુઓની
વચ્ચેનો ખુણો સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા કરતાં નાનો હોય
છે એમ બતાવો.

૫૧. અવક ત્રિકોણમાં અ સૌથી મોટો ખુણો છે; તો
એમ બતાવી આપો કે જેની બાજુઓ અવ, અક, અને
રવક બરાબર હોય એવો ત્રિકોણ દોરવો અશક્ય છે.

૫૨. અવક ત્રિકોણના વ અને ક સાંકડા ખુણા છે;
અને $\angle ક > \angle વ$ છે. વકમાં પ એક બિંદુ છે; તો
અવથી અપ નાની છે એમ બતાવો. અકથી અપ નાની
હોવા માટે પ ક્યાં હોવું જોઈએ ?

૫૩. વર્તુળમાંના ક બિંદુમાં થઈને અવ વ્યાસ જાય છે,
અને અકમાં વર્તુળનું મધ્યબિંદુ મ છે; તો નીચેની બાબતો
સિદ્ધ કરો:—

(૧) કથી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં કઅ મોટી છે.

(૨) કથી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં કબ નાની છે.

(૩) કમાંથી કક્ષ અને કય આ બે ગમે તે લીટીઓ પરિધ સુધી દોરેલી હોય, અને જે \angle કમક્ષ $>$ \angle કમય હોય, તો કક્ષ $>$ કય; અને

(૪)—ઉપલા (૩)નો વ્યત્યાસ.

૫૪. એક વર્તુળનો અબ વ્યાસ છે, અને તેને વર્તુળની બહારના ક બિંદુ સુધી વધાર્યો છે. વર્તુળનું મધ્યબિંદુ મ છે; તો નીચેની બાબતો સિદ્ધ કરો:—

(૧) કથી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં કઅ મોટી છે.

(૨) કથી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં કબ નાની છે.

(૩) કમાંથી કક્ષ અને કય પરિધ સુધી દોરેલી છે, અને \angle ક્ષમક $>$ \angle યમક છે; તો કક્ષ $>$ કય; અને

(૪)—ઉપલા (૩)નો વ્યત્યાસ.

૫૫. અબક સમબાણુ ત્રિકોણમાં મ એક બિંદુ છે. જે \angle મઅબ $>$ \angle મઅક હોય, તો \angle મકબ $>$ \angle મબક છે એ સિદ્ધ કરો.

૫૬. * સમબાણુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાણુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધ્યાં હોય તો કઈ આકૃતિ થાય છે ?

૫૭. સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના અંદરના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓથી જે કાટખુણુ ચતુષ્કોણ થાય છે, તેના કણો સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણની બાણુઓને સમાંતર હોય છે અને તેમની બાદબાકીની બરાબર હોય છે.

૫૮. અબકહ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના અક કણમાં

પ અને દ બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે અપ=કવ છે; તો વપડવ સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણ છે એમ ખતાવી આપો.

૫૯. અવની એકજ બાળુએ અવકડ અને અવક્ષય આ બે સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણો દોરેલા છે; તો ખતાવો કે કડયક્ષ સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણ છે.

૬૦. અવકડ સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણનો અક ઠરું ફેરવી સુધી એવી રીતે વધાર્યો છે, કે કઈ = કઅ થાય છે. ફેરવાંથી કબને સમાંતર ફેર દોરેલી છે, અને તે વધારેલી ડક લીટીને ફમાં મળે છે; તો અવક સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણ છે એમ ખતાવો.

૬૧. અવકડ સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણની અવ, વક, કડ, ડઅ બાળુઓમાં અનુક્રમે ફે, ફ, ગ, હ બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે અહ=કફ અને અઈ=કગ; તો ફફગહ સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણ છે એમ ખતાવો.

૬૨. * અવ લીટીનું ક મધ્યબિંદુ છે. અ,વ,કથી અનુક્રમે અક્ષ, વચ, કજ લંબો આપેલી લીટી પર દોરેલા છે. જો અ અને વ આપેલી લીટીની એકજ બાળુએ હોય, તો એમ ખતાવો કે અક્ષ+વચ=૨કજ છે.

૬૩. * ઉપલા પ્રશ્નમાં અ અને વ જો આપેલી લીટીની સામ-સામી દિશાએ હોય, તો અક્ષ-વચ=૨કજ છે એમ ખતાવો.

૬૪. અવક ત્રિકોણમાં અ ખુણાને દુભાગનારી લીટી, અને વકને દુભાગનારો લંબ, એ એકમેકને ડ બિંદુમાં છેદે છે; અને ડમાંથી અવ અને અક પર (જરૂર હોય તો એ બાળુઓને વધારીને) ડક્ષ, ડચ લંબો દોરેલા છે; તો અક્ષ=અચ અને વક્ષ=કચ એ સિદ્ધ કરો.

૬૫. અવક એક સમબાળુ ત્રિકોણ છે, અને અવમાં ડ એક ગમે તે બિંદુ છે. અડ પર કથી વિરુદ્ધ બાળુએ અડફેર સમબાળુ ત્રિકોણ દોર્યો છે, તો વફેર=કડ છે એમ ખતાવો.

૬૬. અવક ત્રિકોણમાં વમાંથી અકને મળનારી અને કમાંથી અવને મળનારી એવી બે લીટીઓ દોરી હોય, તો તે એક બીજીને દુભાગી શકતી નથી એમ બતાવો.

૬૭. વક પાયા પર અવક અને ડવક ત્રિકોણો છે, અને અડ ॥ વક છે. હવે અવક સમઘ્રિયાળુ ત્રિકોણ હોય, તો તેની પરિમિતિ ડવક ત્રિકોણની પરિમિતિથી ઓછી છે એમ બતાવો.

૬૮. અવકડ ચોરસ છે. અમાંથી વક અને કડનાં મધ્યબિંદુઓ સુધી, અને કમાંથી ડઅ અને અવનાં મધ્યબિંદુઓ સુધી લીટીઓ દોરેલી છે; તો તે લીટીઓથી થતી આકૃતિ સમબાળુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવો.

૬૯. અવક ત્રિકોણના અ શિરોબિંદુમાંથી વક પાયા સુધી અડ, અઈ લીટીઓ એવી દોરી છે, કે \angle વઅડ = \angle ક અને \angle કઅઈ = \angle વ થાય છે; તો અમાંથી વક પર દોરેલો લંબ ડઈને દુભાગે છે એમ સિદ્ધ કરો.

૭૦. અવક ત્રિકોણની અવ બાળુના ડ મધ્યબિંદુમાંથી વકને સમાંતર ડઈ દોરેલી છે, અને અવક ખુણાને વઈ દુભાગે છે; તો \angle અઈવ કાટખુણો છે એમ બતાવો.

૭૧. અવક સમઘ્રિયાળુ ત્રિકોણના પાયાની સામેનો ખુણો અ અર્ધો કાટખુણો છે, અને અ અને વમાંથી સામી બાળુ પર દોરેલા અડ અને વઈ લંબો ફમાં મળે છે; તો ફઈ=ઈક છે એમ બતાવો.

૭૨. અડ લીટી અવક ત્રિકોણના અ આગળના બહારના ખુણાને દુભાગે છે. કમાંથી અડ પર દોરેલો લંબ અડને નમાં મળે છે. વકનું મ મધ્યબિંદુ છે; તો મન = $\frac{1}{2}$ (અવ+અક) છે એમ બતાવો.

૭૩. અવકડ ચતુષ્કોણની અવ, ડક બાળુઓની બરા-

બર અને તેમને સમાંતર જેની બાજુઓ હોય, એવો એક ત્રિકોણ દોર્યો છે; અને તેજ ચતુષ્કોણની અડ, કબની બરાબર અને તેમને સમાંતર જેની બાજુઓ હોય એવો બીજો ત્રિકોણ દોર્યો છે; તો તે ત્રિકોણોના પાયા સરખા છે એમ બતાવી આપો.

૭૪. અબક ત્રિકોણના બહારના અ ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાં ગમે ત્યાં પ બિંદુ છે; તો સિદ્ધ કરો કે અબ+અક < પબ+પક.

૭૫. અબકડઈફગહ નિયમિત અષ્ટકોણ છે, અને તેમાં અફ, બઈ, કહ, ડગ લીટીઓ દોરી છે; તો તેમનાં છેદનબિંદુઓ એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે એમ બતાવો.

૭૬. અડ લીટી અબક ત્રિકોણના અ ખુણાને દુભાગે છે. કમાંથી અડ પર કાઢેલો લંબ અડને નમાં મળે છે, અને વકતું મ મધ્યબિંદુ છે; તો બતાવો કે મન = $\frac{1}{2}$ (અબ-અક).

૭૭. અબક ત્રિકોણની અબ, અક બાજુઓમાં અનુક્રમે ડ, ઈ બિંદુઓ લીધાં છે; અને બઈ, કડ લીટીઓ ફમાં મળે છે; તો ડઅ+અઈ > ઈફ+ફડ એમ બતાવો.

૭૮. ચતુષ્કોણની સામસામી બે બાજુઓ અથવા પાસ-પાસેની બે બાજુઓ સરખી હોય, તો બાકીની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધનારી લીટી સરખી બાજુઓની સાથે સરખા ખુણા કરે છે.

૭૯. અબક ત્રિકોણમાં અબ=અક. વકમાં ડ ગમે તે એક બિંદુ છે. વડ, ડકનાં મધ્યબિંદુઓમાંથી વક પર દોરેલા લંબો વઝ, અકને અનુક્રમે હ અને જમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે હવ=અજ અને અહ=કજ છે.

૮૦. એક લીટીમાં અ, બ, ક બિંદુઓ હારબંધ એવાં લીધાં

છે કે અવ= $\frac{1}{2}$ વક. બ મધ્યબિંદુ ધારી $\frac{1}{2}$ અવ ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ કાઢ્યું છે. તેના પરિધ પર પ એક ગમે તે બિંદુ લીધું છે, અને અ, પ બિંદુઓને સાંધનારી લીટી વધારીને પદ=અપ કરી છે. હવે દબ, દક સાંધો અને \angle વદક કાઢખુણા છે એમ બતાવો.

૮૧. અવક ત્રિકોણની વક બાજુનું ડ, અને અડનું ઈ, મધ્યબિંદુ છે. વઈ વધારવાથી તે અકને ફમાં મળે છે; તો અફ= $\frac{1}{2}$ અક છે એમ બતાવો.

૮૨. અવક એક ત્રિકોણ છે. વકનું ડ મધ્યબિંદુ છે. અકમાં ફ બિંદુ એવું લીધું છે, કે અફ= $\frac{1}{2}$ અક થાય છે. અડ, વફ એક બીજીને ઈમાં છેદે છે; તો અડનું ઈ મધ્યબિંદુ છે, અને ઈફ= $\frac{1}{2}$ વફ છે એમ બતાવી આપો.

૮૩. એક ત્રિકોણમાં એવો એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો કે તેના કણો ત્રિકોણમાં આપેલા એક બિંદુમાં એક બીજીને છેદે.

૮૪. અવકડ ચતુષ્કોણમાં પ બિંદુ ક્યાં લીધું હોય તો પઅ+પવ+પક+પડનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો થશે ?

૮૫. ચતુષ્કોણ આકારના કાગળના ખુણા વાળવાથી તેમનાં શિરોબિંદુઓ એકજ બિંદુમાં મળે, અને કાગળ બધે ઠેકાણે બેવડો થાય, એટલા માટે કાગળનો આકાર કેવો હોવો જોઈએ ?

૮૬. અવ પાયો અને અમાંથી પડતો વક ઉપરનો લંબ આપેલા છે; તો અવક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાઢો.

૮૭. આપેલાં બે બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય એવી, આપેલા એક ત્રીજા બિંદુમાંથી એક સીધી લીટી દોરો.

૮૭(અ). એક આપેલા બિંદુમાંથી એવી એક લીટી દોરો કે જે એક બીજીને છેદનારી બીજી બે લીટીઓની સાથે સરખા ખુણા કરે.

૮૮. જે ત્રિકોણની બે બાજુઓ આપેલી બે લીટીઓની બરાબર હોય, અને આ બે બાજુઓ પૈકી એકની સામેનો ખુણો આપેલા ખુણા બરાબર હોય, એવો ફક્ત એકજ ત્રિકોણ ક્યારે બને છે ?

૮૯. અબક ત્રિકોણના અ શિરોબિંદુમાંથી બકને સમાંતર ડઅઈ લીટી એવી દોરો કે ડઈ=બડ+કઈ થાય.

૯૦. અબક એક ત્રિકોણ છે, અને અમાંથી બકને સમાંતર એક લીટી કાઢી છે; તો બમાંથી અકને પમાં મળે એવી અને ઉપલી સમાંતર લીટીને વમાં મળે એવી એક લીટી એવી રીતે દોરો, કે બપ લીટી પવના $\frac{1}{2}$ બરાબર થાય.

૯૧. કડ લીટીની એકજ બાજુએ અ અને બ બિંદુઓ છે. કડમાં એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો, કે (૧) તે બિંદુથી અ અને બનાં અંતરોની બાદબાકી ઓછામાં ઓછી થાય; અને (૨) તે અંતરોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો થાય.

૯૨. અબક એક આપેલો ત્રિકોણ છે, અને ડઈ, ફગ આ આપેલી લીટીઓ એક બીજીને છેદે છે; તો અબક ત્રિકોણની સાથે એકરૂપ હોય એવો, અને જેની એક બાજુ ડઈ પર પડે અને એક શિરોબિંદુ ફગ પર પડે, એવો ત્રિકોણ શી રીતે દોરવો તે બતાવો.

૯૩. અબક ત્રિકોણના અ શિરોબિંદુમાંથી એવી એક લીટી દોરો કે તે પર બ અને કમાંથી દોરેલા લંબો ૧ : ૨ આ પ્રમાણમાં હોય.

૯૪. ચાર બાજુઓ અને એક ખુણો આપ્યાં છે, તે ઉપરથી ચતુષ્કોણ દોરો.

૯૫. અ અને બ બિંદુઓ કડ લીટીની (૧) સામ-સામી દિશાએ છે એમ ધારીને, અને (૨) એકજ બાજુએ છે એમ ધારીને, કડમાં પ બિંદુ એવું શોધી કાઢો, કે \angle અપક = \angle બપડ થાય.

૯૬. પાયાની સામેનો ખુણો અને પાયાની પાસેનો એક ખુણો એ બેનો સરવાળો આપ્યો છે; તો આપેલા પાયા પર સમઘ્રિયાળુ ત્રિકોણ કાઢો.

૯૭. ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુને મળનારી એવી એક લીટી દોરો કે તે પર બાકીનાં બે શિરોબિંદુઓમાંથી દોરેલા લંબો સરખા થાય.

૯૮. અવક ત્રિકોણની અવ અને અક આ સરખી બાજુઓમાં ક્ષ અને ચ બિંદુઓ એવાં લો, કે $વક્ષ = ક્ષચ = ચક$ થાય.

૯૯. એક આપેલા બિંદુમાંથી એવી એક લીટી કાઢો, કે આપેલી બે સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનો તેનો માળો આપેલી લંબાઈનો થાય. એમ કરવું ક્યારે અશક્ય થાય છે ?

૧૦૦. નીચેના પક્ષ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવો:—

- (૧) અ+વ, ક, \angle અ.
- (૨) વ-ક, અ, \angle ક.
- (૩) ક, \angle વ અને પરિમિતિ.
- (૪) કાટખુણુ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખુણો અને પરિમિતિ.
- (૫) વ+ક, અ, \angle અ.
- (૬) વ-ક, અ, \angle અ.
- (૭) અ, ક-વ, \angle ક- \angle વ.
- (૮) અ, ક+વ, \angle ક+ \angle વ.
- (૯) અ, \angle અ, \angle વ- \angle ક.
- (૧૦) અ=૨", \angle અ=૪૦°, \angle વ- \angle ક=૨૦°.
- (૧૧) અ+વ=૩", ક=૨.૬", \angle ક=૧૨૦°.
- (૧૨) અ=૪", ક-વ=૧.૪૧", \angle અ=૬૦°.
- (૧૩) અ+વ=૩.૭", ક=૦.૭૫", \angle અ=૬૨°.
- (૧૪) પરિમિતિ=૫", \angle અ=૪૨°, \angle વ=૩૬°.
- (૧૫) ક=૨.૪", વ-અ=૧.૬", \angle વ- \angle અ=૬૫°.
- (૧૬) વ=૧.૧", ક+અ=૩.૧", \angle ક- \angle અ=૬૦°.

પરિશિષ્ટ બ.

પ્રશ્નો છોડવાની પૃથક્કરણપદ્ધતિ.

જેમ શસ્ત્રનો ઉપયોગ કરતાં આવડ્યા સિવાય શસ્ત્ર હાથ-માં હોય તોપણ તે ન હોય તેના જેવુંજ છે, તેમજ્ઞ જ્ઞાનના સંબંધમાં પણ છે; એટલે કે જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરતાં આવડ્યા સિવાય જ્ઞાન હોય અથવા ન હોય તે સરખુંજ છે. માટે જે જ્ઞાન વિદ્યાર્થીઓને આપવામાં આવ્યું હોય, તે જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરતાં તેમને શીખવવું જોઈએ. ભૂમિતિના વિષયમાં જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરવો એટલે પ્રશ્ન છોડવા એજ છે. તેથી કરીને ભૂમિતિના વિષયમાંના જ્ઞાનનો છોડવાઓને ઉપયોગ કરતાં આવડે, એટલા માટે ભૂમિતિમાંના પ્રશ્ન છોડવાની શક્તિ છોડવાઓમાં ઉત્પન્ન કરવાની જરૂર છે.

તેમ છતાં પણ આ પ્રશ્નો શી રીતે છોડવા એ એક મોટી મુશ્કેલી છે. વિદ્યાર્થીઓને પહેલવહેલા પ્રશ્ન આપવામાં આવે, કે તેઓ ગભરાઈ જાય છે, અને પ્રશ્ન છોડવાની કોઈ પણ રીત તેમને ન આવડતી હોવાથી તેમનો એવો અભિપ્રાય થાય છે, કે પ્રશ્નો ઉત્તર આવડવો એ એક નસીબની વાત છે. પરંતુ ખરી વાત એમ નથી. પ્રશ્ન છોડવામાં ફત્તેહમંદ ઉતરવા માટે સ્વાભાવિક યુદ્ધિ એક આવશ્યક બાબત છે; પણ પ્રશ્ન છોડવાની પદ્ધતિની માહિતી અને મહાવરો એ બાબતો પણ તેટલીજ અગત્યની છે. માટે આ પદ્ધતિથી છોડવાઓને જાણીતા કર્યા હોય, અને તેમને પ્રશ્ન છોડવાની ટેવ પડે, તો તેઓ આ કામમાં ઘણા આગળ વધશે. આ પ્રશ્ન છોડવાની પદ્ધતિ કઈ તે આગળ જણાવ્યું છે, તોપણ તે પદ્ધતિનું વર્ણન કરતાં પહેલાં એટલું કહેવું અવશ્યનું છે, કે બીજી કોઈ પણ ઇષ્ટ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની

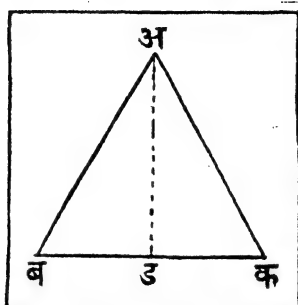
યુક્તિ શોધી કાઢવાની આપણી હંમેશની જો પદ્ધતિ છે, તે પદ્ધતિનું અને આ પદ્ધતિનું તત્ત્વ એકજ છે. જ્યારે કોઈ બાબત આપણે સિદ્ધ કરવી હોય છે, ત્યારે તે સિદ્ધ કરવાની યુક્તિ ખોળતી વખતે આપણે સાધારણ રીતે જોતાં નીચે પ્રમાણે યત્ન કરીએ છીએ. પ્રથમ આપણે એવો વિચાર કરીએ છીએ, કે એક ઇષ્ટ બાબત અ સિદ્ધ કરવા માટે તેનું સાધન બ આપણે પ્રાપ્ત કરવું જોઈએ; અને બ મેળવવા માટે ક પ્રાપ્ત કરવું જોઈએ. પરંતુ આમાંથી કોઈ પણ સાધન આપણને અનુકૂળ નથી એવું આપણને માલમ પડે છે, એટલે આ કારણોની પરંપરાની વધારે શોધ કરવી જોઈએ એમ આપણને લાગે છે. એવી શોધ કરતાં કરતાં કનું સાધન ડ છે, અને ડનું સાધન ક્ષ છે, અને ક્ષ આપણને અનુકૂળ છે, એમ જણાઈ આવે છે. પછી આપણે એવો વિચાર નક્કી કરીએ છીએ, કે ક્ષ આપણને અનુકૂળ છે, માટે ક્ષ પરથી ડ, અને ડ પરથી ક અનુકૂળ કરી લેવું; અને ક અનુકૂળ થયું એટલે તે પરથી બ, અને બ પરથી અ સિદ્ધ કરી લેવું. દાખલા તરીકે એકાદ નોકરી જોઈતી હોય, અને તે વગથી અથવા બલામણથી મળવા જેવી હોય, તો આપણે એવો વિચાર કરીએ છીએ, કે મને નોકરી આપવી અ અધિકારીના હાથમાં છે; તે અધિકારી પાસે બનું વજન છે; બ, કનો સ્નેહી છે, પણ કની સાથે અમારે કંઈ સ્નેહ નથી; માટે કના સ્નેહીઓમાં અથવા સ્નેહીઓના સ્નેહીઓમાં આપણી ઓળખાણવાળો કોઈ છે કે નહિ એની તપાસ કરવી જોઈએ. એવી રીતે તપાસ કરતાં કના સ્નેહીઓમાં આપણો ઓળખીતો માણસ જડ્યો, એટલે તેની મારફતે કને મળી, કની મદદથી બને અને બની મદદથી અને આપણે અનુકૂળ કરી લઈએ છીએ. એજ પદ્ધતિ (ઇષ્ટ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની) આપણી બીજી બધી યુક્તિઓમાં દેખાય છે; એટલે

કે કોઈ પણ ઇષ્ટ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની આપણી હંમેશની રીત એવી હોય છે, કે તે વસ્તુ પ્રાપ્ત કરાવે એવાં સાધનોની પરંપરાની આપણે તપાસ કરતાં જઈએ છીએ; અને તે સાધનોમાંનું એકાદ સાધન આપણા તાબામાંનું અથવા આપણું જાણીતું જણાયું, એટલે તે સાધન મારફતે આપણે ઇષ્ટ વસ્તુ મેળવીએ છીએ. એજ માર્ગ આપણે ભૂમિતિમાં સ્વીકાર્યો પડે છે. આ રીતનું પૃથક્કરણ કરીએ તો સાર નીચે પ્રમાણે જણાઈ આવે છે. જે બાબત સિદ્ધ કરવી છે, તે સિદ્ધ થઈ ગઈ છે, એવી કલ્પના કરીને તે સિદ્ધ કરવામાં કઈ બાબતો સાધનરૂપ છે, એની આપણે શોધ કરીએ છીએ; અને એવી શોધ કરતાં કરતાં ધારેલી વસ્તુ મેળવવામાં આધારભૂત હોય એવી આપણા તાબામાંની અથવા આપણી જાણીતી વાત જડી આવે છે, એટલે તેને આધારે આપણે ઇષ્ટ વસ્તુ તરફ જઈએ છીએ. આ પ્રમાણે સાધ્ય વસ્તુ(નાં સાધનો)નું પ્રથમ પૃથક્કરણ, અને પૃથક્કરણ કરી આધાર જડ્યો એટલે તે આધારે એકીકરણ, આ બે ક્રિયાઓ દરેક પ્રયત્નમાં આવશ્યક હોય છે. હવે એજ તત્ત્વ ભૂમિતિને લાગુ કરીએ, તો કોઈ પણ પ્રશ્ન છોડવાની રીત નીચે પ્રમાણે હોવી જોઈએ એમ જણાઈ આવશે. જે સત્ય સાબીત કરવાનું હોય, અથવા જે રચના કરવાની હોય, તે સત્ય સિદ્ધ થયું છે, અથવા તે રચના બની ગઈ છે, એમ પ્રથમ ધારવું. પછી તે સિદ્ધ થવા માટે કઈ સાધનભૂત બાબતો સિદ્ધ થવી જોઈએ એનો વિચાર કરવો. તે બાબતો સમજાય, એટલે તે સિદ્ધ થવા માટે બીજી કઈ બાબતો સિદ્ધ થવી જોઈએ એનો વિચાર કરવો. એવો વિચાર કરતાં કરતાં, જે બાબત પ્રમેયના પક્ષ પરથી આપણા જાણવામાં હોય, તેની સાથે સાધનોની પરંપરાનો સંબંધ જોડવો. છેક પક્ષ સુધી ઉપલી સાધનપરંપરાનો સંબંધ નક્કી થયો, એટલે ઉત્તરો ક્રમ સ્વીકારી સિદ્ધ કરવું હોય તે સિદ્ધ કરવું.

પૃથક્કરણપદ્ધતિનાં ઉદાહરણ.

ઉદાહરણ ૧.

સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી પાયાના બે સરખા ભાગ કરે છે.



અબક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે, અને તેના પાયાની સામેના ખુણો દુભાગનારી લીટી અડ છે. તે ડ બિંદુમાં બકના બે સરખા ભાગ કરે છે, એવું આપણે સિદ્ધ કરવું છે એમ ધારો.

પૃથક્કરણ.

બડ, ડકની બરાબર છે એમ ધારીએ, તો તે વાત સિદ્ધ થવા માટે પહેલાંનાં ક્યાં કારણો અનુકૂળ હોવાં જોઈએ? બે લીટીઓ અરસપરસ સરખી છે એમ નક્કી થવા માટે (૧) તે બંને કોઈ ત્રીજી લીટીની બરાબર, અથવા તેના કોઈ અમુક અંશ, અથવા તેનાથી અમુકગણી હોવી જોઈએ; (૨) અથવા તે એકજ ત્રિકોણમાંના બે સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ હોવી જોઈએ; (૩) અથવા બે એકરૂપ ત્રિકોણોની સંગત બાજુઓ હોવી જોઈએ.....વગેરે. આ-માંની પહેલી કલ્પનાને કોઈ આધાર જડતો નથી. ખીજી

કલ્પનાને પણ આધાર નથી. માત્ર ત્રીજી કલ્પનાને આધાર મળવાનો સંભવ લાગે છે. હવે આ કલ્પના ખરી કરવા માટે, એટલે \triangle અડબ અને \triangle અડક એકરૂપ કરવા માટે, કઈ બાબતો ખાસ જરૂરની છે? બે ત્રિકોણ એકરૂપ કરવા માટે બંનેની ત્રણ બાજુઓ અરસપરસ સરખી જોઈએ, અથવા બેની બધી બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખુણા એ સરખાં હોવાં જોઈએ, અથવા.....વગેરે. આમાંની પહેલી કલ્પના સંભવતી નથી, પણ બીજી કલ્પના તો વસ્તુસ્થિતિની સાથે પુરેપુરી મળતી આવે છે. કારણ કે પક્ષ પ્રમાણે અબ, અડ બાજુઓ અને \angle બઅડ અનુક્રમે અક, અડ બાજુઓ અને \angle કઅડની બરાબર છે.

બડ અને કડ એક બીજીની બરાબર સિદ્ધ કરવા માટે જે પૂર્વ કારણો આવશ્યક હતાં, તેમની પરંપરા જોતાં તેમાંના એક પગથીઆનો સંબંધ પક્ષની સાથે મળતો આવે છે, એવું જણાઈ આવે છે; માટે આ પગથીઆથી પાછળ પાછળ જઈએ, તો આપણે સિદ્ધ કરવાની બાબત પર જઈ પહોંચીએ એ ખુલ્લું છે.

એકીકરણ.

∴ બઅડ અને અકડ ત્રિકોણોમાં—

બઅ = અક;

અડ બંનેમાં સાધારણ;

\angle બઅડ = \angle અકડ;

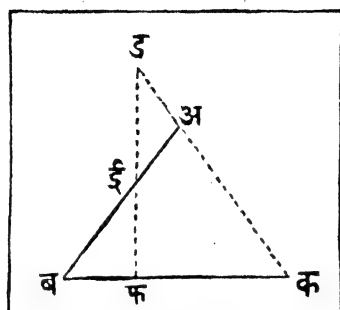
∴ \triangle બઅડ \equiv \triangle અકડ.

∴ બડ = કડ.

ઉદાહરણ ૨.

અબક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે; તેની અક બાજુ ડ મુધી વધારી છે; અબમાંથી અડ જેટલો અઈ ભાગ કાપી કાઢ્યો છે; બકને ક બિંદુમાં મળતાં

સુધી હઈને વધારી છે; તો \angle ડફક એક કાટખુણો છે એમ સિદ્ધ કરો.



પૃથક્કરણ.

\angle ડફક કાટખુણો છે એમ ધારો. તેમ ધારીએ તો—

$$\angle \text{ડફક} = \angle \text{ફડક} + \angle \text{ડકફ.} \quad (\text{પ્ર. ૮})$$

$$\text{પણ } \angle \text{ડફક} = \angle \text{ફવઈ} + \angle \text{વઈફ; } (\text{પ્ર. ૮, ઉ. ૩})$$

$$\therefore \angle \text{ફડક} + \angle \text{ડકફ} = \angle \text{ફવઈ} + \angle \text{વઈફ} \\ (= \angle \text{અઈડ}).$$

$$\text{પણ } \angle \text{ડકફ} = \angle \text{ફવઈ.}$$

\therefore ઉપલા સમીકરણમાંથી આ ખુણા લઈ લીધા હોય તો—

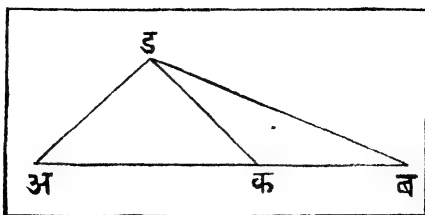
$$\text{શેષ } \angle \text{ફડક} = \text{શેષ } \angle \text{અઈડ.}$$

હવે $\angle \text{ફડક} = \angle \text{અઈડ}$ એ પક્ષ છે; માટે અહીંથી ઉલટા ક્રમે જવાથી \angle ડફક કાટખુણો છે એમ સિદ્ધ થશે.

એકીકરણ (સ્પષ્ટ છે.)

ઉદાહરણ ૩.

આપેલી લીટીના એવા બે ભાગ કરવા, કે તેમાંના એક પરના ચોરસ બીજા પરના ચોરસથી બમણો થાય.



પૃથક્કરણ.

અવ આપેલી લીટી છે. ધારો કે તેના ક બિંદુમાં માગ્યા પ્રમાણે ભાગ થયા છે.

હવે જો $અક^2 = ૨ બક^2$ હોય, તો અક જોનો કર્ણ હોય એવા સમદ્વિબાજી કાટખુણ ત્રિકોણની એક બાજુના વર્ગની બરાબર વકનો વર્ગ હોવો જોઈએ.

એવો અકડ ત્રિકોણ કાઢો, એટલે કે $\angle અકડ, \angle કઅડ$ દરેક ૪૫° નો કરો.

$$\therefore કડ^2 = કવ^2,$$

$$\therefore કડ = કવ,$$

$$\therefore \angle વડક = \angle કવડ.$$

$$\therefore અડ = કડ,$$

$$\therefore \angle ડઅક = \angle ડકઅ = \frac{1}{2} કાટખુણો;$$

$$(\text{કારણ કે } \angle અડક = ૧ કાટખુણો.) \quad (\text{રચના.})$$

$$\therefore \angle ડકવ બહારનો ખુણો = ૧\frac{1}{2} કાટખુણો, \quad (\text{પ્ર. ૧})$$

$$\therefore \angle કડવ + \angle કવડ = \frac{1}{2} કાટખુણો. \quad (\text{પ્ર. ૮})$$

$$\therefore \angle કવડ = \frac{1}{2} કાટખુણો, \text{ અને } \angle કડવ = \frac{1}{2} કાટખુણો.$$

હવે અવડ ત્રિકોણના $\angle વઅડ$ અને $\angle અવડ$ આપણે જાણીએ છીએ, અને ડકવ ત્રિકોણના પણ બંધા ખુણા જાણીએ છીએ. તેથી આ ત્રિકોણો કાઢી શકાશે; અર્થાત્ ક બિંદુનું સ્થળ પણ કાઢી શકાશે.

એકીકરણ.

∠બઅડ $\frac{1}{2}$ કાટખુણા બરાબર કરો.

∠અવડ $\frac{1}{2}$ કાટખુણા બરાબર કરો.

∠વડક $\frac{1}{2}$ કાટખુણા બરાબર કરો.

ક ધટ બિંદુ છે.

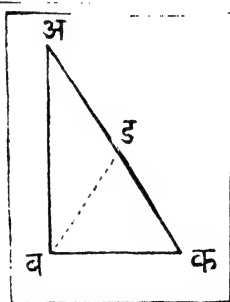
ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતા.

કોઈ કોઈ વખતે સાધ્ય સિદ્ધ કરવા માટે ક્યાં કારણો અનુકૂળ હોવાં જોઈએ એનો વિચાર કરવા કરતાં, સાધ્ય ખોટું છે એમ ધારવાથી કઈ અસંભવિત બાબતો અથવા પક્ષથી વિરુદ્ધ બાબતો ઉત્પન્ન થાય છે, તેનો વિચાર કરીને, સાધ્ય સિવાય બીજી દરેક કલ્પના પક્ષને વિરુદ્ધ હોવાથી સાધ્ય સિવાય બીજી કોઈ પણ બાબત સંભવતી નથી, એવી સિદ્ધતા આપવી વધારે સહેલી પડે છે.

તેમ છતાં, જ્યાં સાધ્યને ફક્ત એક કે એ વિકલ્પ હોય છે ત્યાંજ આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો સગવડ બરેસો હોય છે, એ ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ.

ઉદાહરણ.

કાટખુણુ ત્રિકોણમાં કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણના મધ્યબિંદુ સુધી દારેલી લીટી કર્ણના અધ બરાબર હોય છે.



પક્ષ—અવક કાટખુણ ત્રિકોણ છે. ડ, અકનું મધ્યબિંદુ છે.

સાધ્ય—વડ = અડ = ડક.

સિદ્ધતા—કડ અથવા અડની બરાબર વડ ન હોય, તો તેનાથી નાની કે મોટી હોવી જોઈએ. એ સિવાય ત્રીજી સ્થિતિ સંભવતી નથી.

તે નાની હોય તો—

\angle વઅડ $<$ \angle અવડ થાય,

અને \angle વકડ $<$ \angle કવડ થાય,

એટલે $(\angle$ વઅડ + \angle વકડ) $<$ \angle અવક થાય;

અને મોટી હોય તો—

$(\angle$ વઅક + \angle વકઅ) $>$ \angle અવક થાય.

પણ એમાંની એક પણ બાબત શક્ય નથી;

કારણ કે \angle અવક = ૧ કાટખુણો છે; અર્થાત \angle વઅક + \angle વકઅ = \angle અવક છે.

માટે વડ, અડથી નાની પણ નથી, અને મોટી પણ નથી; એટલે બંને સરખી છે.



ઉત્તરો.

(નીચે આપેલા કેટલાક ઉત્તરો ખરા ઉત્તરોની લગભગનાં છે. વિદ્યાર્થીએ માપણી કરીને આપવાનાં ઉત્તરોમાં $\frac{1}{4}^{\circ}$ ઇંચ જેટલી અથવા એકાદ અંશ જેટલી ચૂક હોય તો તે ગણવા જેવી નથી.)

પૃષ્ઠ ૧૫-૧૬.

પ્ર. ૧. $૧.૬''$; ૪૦ મિ. મી.

પ્ર. ૪. પહેલી લીટી=૪૦ મિ. મી; $૧.૬''$.

ખીજી લીટી=૪૮ મિ. મી; $૧.૮૫''$.

પ્ર. ૫. અક=૮''; કચ=૪''; અચ=૧.૨''.

પ્ર. ૬. અક=૬''; કડ=૪''; ડચ=૦.૩''; અચ=૧.૩''.

પ્ર. ૭. અચ=૧.૭૫''; અક=૮૫''; કચ=૮''.

પૃષ્ઠ ૨૧-૨૪.

પ્ર. ૨. પહેલું વૃક્ષ=૩', ૨''; ખીજું વૃક્ષ=૨', $૧\frac{1}{2}''$; ત્રીજું વૃક્ષ=૨', ૭''.

પ્ર. ૩. ૭૦૦ ફુટ.

પ્ર.૧૧. ૧૦'. પ્ર. ૧૨. ૪૧'. પ્ર. ૧૩. ૩૭.૨'

પ્ર.૧૪. ૮.૭૫ માઇલ. પ્ર.૧૫. ૭.૨ માઇલ.

પ્ર.૧૬. ૧૩.૩૭૫ માઇલ. પ્ર.૧૭. ૩.૭૫ માઇલ.

પ્ર.૧૮. ૪૦૦'.

પૃષ્ઠ ૪૭-૪૮.

પ્ર. ૧. પૂર્વની ઉત્તરે ૬૦° ; ઉત્તરની પશ્ચિમે ૩૦° .

પ્ર. ૨. વાયવ્ય ખુણો.

પ્ર. ૩. પશ્ચિમની ઉત્તરે ૨૬° .

પ્ર. ૪. ૫.૧૨૫ માઇલ; પશ્ચિમની દક્ષિણે ૬૧° .

પ્ર. ૫. $૬\frac{1}{2}$ માઇલ; પૂર્વની ઉત્તરે ૨૫° .

- પ્ર. ૬. ૨૮.૭૫ માઇલ; દક્ષિણની પશ્ચિમે ૯°.
 પ્ર. ૭. દક્ષિણની પૂર્વે ૩૬°; ૩.૯૫ માઇલ.
 પ્ર. ૮. ૪.૦૬૨૫ માઇલ.
 પ્ર. ૯. લગભગ ૧૨૨૫ ફુટ.
 પ્ર. ૧૦. ૬ સે. મી. પ્ર. ૧૧. ૫૭૩ ક્યુબિક.

(સમાપ્ત)

